Tema de: Electrotecnia

Autor: Carlos Alberto Aon

Circuitos en Corriente Continua
Resolución de Circuitos

Carrera de Control Eléctrico y Accionamientos

61

CARRERA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
INSTITUTO NACIONAL SUPERIOR DEL PROFESORADO TÉCNICO

ÍNDICE

Magnitudes Eléctricas:

El volumen atómico determina la estructura reticular y cristalina de una sustancia y la distancia de los distintos átomos entre sí. En los metales, los electrones de la capa externa se presentan en la red como electrones libres. Por tanto, la distancia atómica es menor, resultando mayor la densidad de estos materiales. Con ayuda de un aporte de energía estos electrones libres pueden moverse en una dirección determinada. Se habla entonces de “flujo de electrones” o corriente. La velocidad de los electrones es solo de algunos mm/s, sin embargo el impulso se propaga con la velocidad de la luz.
Por tanto, la definición de corriente eléctrica se puede formular de la siguiente manera general:

Corriente Eléctrica = Flujo de Portadores de Carga

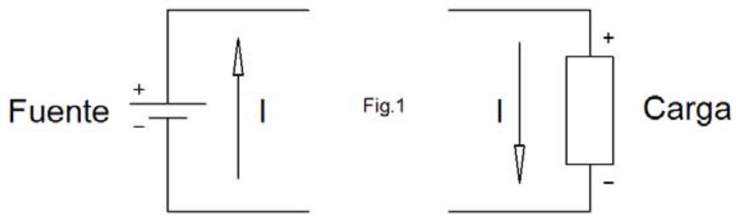
Es decir, sólo puede producirse una corriente donde existen portadores de carga y estos se pueden mover libremente. Tales materias se llaman conductores. Nuevamente se distingue aquí entre materias que al pasar la corriente no cambian químicamente (conductores de 1ra.clase) y las que al paso de la corriente experimentan una variación química (conductores de 2da.clase). Las materias que no tienen portadores de carga con libertad de movimiento se llaman no conductores o aislantes. La denominación de “no conductor “ es incorrecta, en sentido estricto, ya que incluso estas materias tienen algunos electrones libres, pero éstos son poco móviles. Se trata simplemente, de muy malos conductores. Únicamente hay un aislante absoluto, el vacío. Entre conductores y aislantes no se puede trazar un límite preciso. Queda entre ambos el campo de los semiconductores, técnicamente interesantes. La conductividad propia de los semiconductores puros es muy escasa a temperatura normal. Mediante la introducción de átomos extraños se puede aumentar la conductividad de un semiconductor.
En la corriente no se produce ninguna clase de acumulación de portadores de carga, ni se pierde ninguna clase de estos portadores, de modo que, por un lado del conductor tienen que salir tantos portadores de carga como entran por el otro lado. En una corriente existe siempre un circuito cerrado.
Para definir claramente la corriente eléctrica son necesarios tres conceptos, a saber:

Corriente.

La Intensidad de la corriente es la cantidad de electricidad que pasa por una sección en cada segundo:

$$I = Intensidad \;=\frac{Cantidad\ de\ Electricidad}{Tiempo}=\frac{Q}{t} \qquad (1)$$

En el caso de las magnitudes variables en el tiempo, hay que sustituir el cociente *Q/t* por el diferencial *dq/dt.*
El sentido de la corriente se toma de positivo a negativo en la carga y de negativo a positivo en la fuente.



Los sentidos de la corriente y de la tensión se fijan arbitrariamente y luego se escriben las ecuaciones de acuerdo a estos sentidos. Más adelante se profundizará sobre el tema. La densidad de corriente *S* caracteriza la relación entre la intensidad de corriente I y la sección del conductor *A*.

$$S = Densidad\ de\ Corriente = \frac{Intensidad\ de\ Corriente}{Sección\ del\ Conductor} = \frac{I}{A}$$

Como unidad de Intensidad de Corriente se ha establecido el Amperio o Ampere [A].

Definición del Amperio o Ampere:
El Amperio es la intensidad de una corriente eléctrica invariable que circulando por dos conductores paralelos, rectos, infinitamente largos, de sección circular despreciable, colocados en el vacío a la distancia de un (1) metro entre ellos produciría entre estos conductores, por cada metro de longitud, la fuerza electrodinámica de 2 x 10^{-7} Newton.
Esta unidad fundamental, 1 A equivale a 6.242 x 10^{18} electrones por segundo.
Si el flujo de portadores de carga se produce en un solo sentido, se dice que es corriente continua, si cambia de sentido, se tiene corriente alterna.
Conforme a la ecuación (1), se tiene que la cantidad de electricidad es:

$$Q = I \cdot t$$

Junto al Amperio – segundo [A.s] se utiliza el Culombio o Coulomb [C], como unidad de carga eléctrica.
Se tiene:

$$1\ A \cdot s = 1\ C$$

Para la densidad de corriente *S = I/A*, se obtienen las unidades:

$$\frac{A}{m^2} = 10^{-4}\ A/cm^2 = 10^{-6}\ A/mm^2$$

La existencia de una corriente eléctrica se conoce sólo por sus efectos. Los siguientes causas se producen siempre en relación con una corriente eléctrica:

a.- Toda corriente está ligada a una producción de calor.
b.- Toda corriente va acompañada siempre de un campo magnético.
c.- Toda corriente iónica origina un transporte de materia.

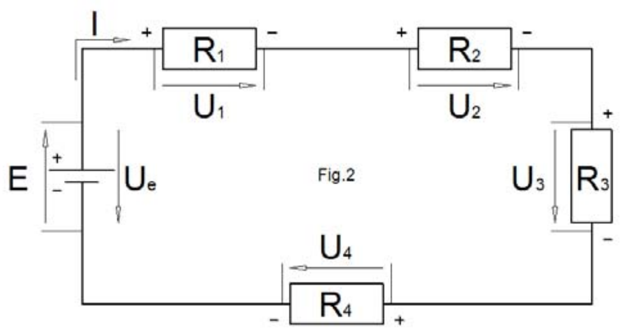
Tensión.

El movimiento de los portadores de carga requiere una fuerza que, lo mismo que una bomba, “impulse” portadores de carga hacia un lado del circuito, mientras que al mismo tiempo, “aspire” portadores de carga por el otro lado.
Esta magnitud de impulsión, que se denomina tensión, aparece en los circuitos eléctricos bajo dos formas distintas:

a.- La fuerza electromotriz (f.e.m.) *E*, es la tensión que se genera en una fuente de energía eléctrica, o generador.

b.- La caída de tensión *U* es la tensión que consumen los receptores o cargas.

La figura (2) muestra la manera en que los tramos de caída de tensión, es decir, las resistencias *R*, consumen la energía comunicada a los portadores de carga por el generador eléctrico, donde: $U_1, U_2, \ldots, U_n$, son las caídas de tensión y *E* la fuerza electromotriz.



Las tensiones de alimentación se pueden generar de diferentes maneras:

a.- Por efecto químico (batería, acumulador, pila de combustible)
b.- Por efecto magnético (generador)
c.- Por efecto de la luz (foto elemento)
d.- Por efecto del calor (termo elemento)
e.- Por efecto de la presión sobre cristales (efecto piezoeléctrico, fonocaptor)
f.- Por separación de cargas, debido a la fricción (generador de banda)

La tensión impulsa a los portadores de carga.
Como unidad de tensión se ha establecido el Voltio o Volt [V].
La unidad "Voltio o Volt" se deriva de las unidades básicas del sistema internacional (metro, Newton, segundo, Amperio o Amper, etc.) y la misma queda definida por la ecuación:

$$1V = 1\frac{kg\ .\ m^2}{A\ .\ s^3} = 1\frac{N\ .\ m}{A\ .\ s}$$

Donde 1 Newton = 1N = $1\frac{kg\ .\ m}{s^2}$

Resistencia.

El movimiento de los portadores de carga en el interior de un conductor resulta dificultado por los choques constantes de átomos. Esta "oposición" del conductor al paso de la corriente se denomina resistencia *R*. Los conductores tienen resistencia muy diferente, que depende de sus dimensiones exteriores y de su estructura interna. La resistencia del conductor es directamente proporcional a su longitud ℓ e inversamente proporcional a su sección A. La dependencia de la estructura interna de la materia considerada se expresa en una constante de material, que se denomina resistividad y se representa con la letra griega *ρ* (ro).
La ecuación para calcular la resistencia es la siguiente:

$$\boxed{R = \frac{\rho\ .\ \ell}{A} = \frac{\ell}{\chi\ .\ A}}$$

La unidad de resistencia es el ohmio u ohm [Ω].
La unidad "ohmio u ohm" se deriva del sistema internacional de unidades y se calcula por la Ley de Ohm, que se estudiará más adelante.

$$1\,\Omega = 1\frac{V}{A}$$

Para algunas consideraciones es conveniente contar con el valor inverso de la resistencia, es decir, la conductancia.

$$G = \frac{1}{R}$$

La unidad correspondiente a 1/Ω, se ha denominado "Siemens" [s]. Análogamente se conoce el valor inverso de la resistividad, 1/ρ = χ, que se denomina conductancia específica o conductividad eléctrica.
La resistividad *ρ* y, por tanto, la resistencia *R* dependen de la temperatura, frente a la cual se comportan de manera diferente los metales no ferromagnéticos de las aleaciones metálicas, los semiconductores y los electrolitos. Para pequeñas variaciones de temperatura, de 0°C a unos 150°C, la variación de la resistencia en estos cinco grupos de materiales es aproximadamente proporcional a la variación de temperatura.

2.- Leyes Fundamentales de la Electricidad:

Ley de Ohm:

La relación entre las tres magnitudes fundamentales, corriente, tensión y resistencia viene expresada por la Ley de Ohm.
La corriente es directamente proporcional a la tensión e inversamente proporcional a la resistencia.

$$\boxed{I=\frac{U}{R}}$$

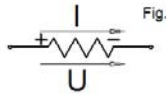


Fig.3

La función $I = f(U)$, esto es, la característica corriente-tensión, es una recta para el caso de $R = cte$. El valor inverso de la pendiente de esta recta representa la magnitud de la resistencia.
Para verificar esto último, realizamos una experiencia elemental, construyendo el siguiente circuito.

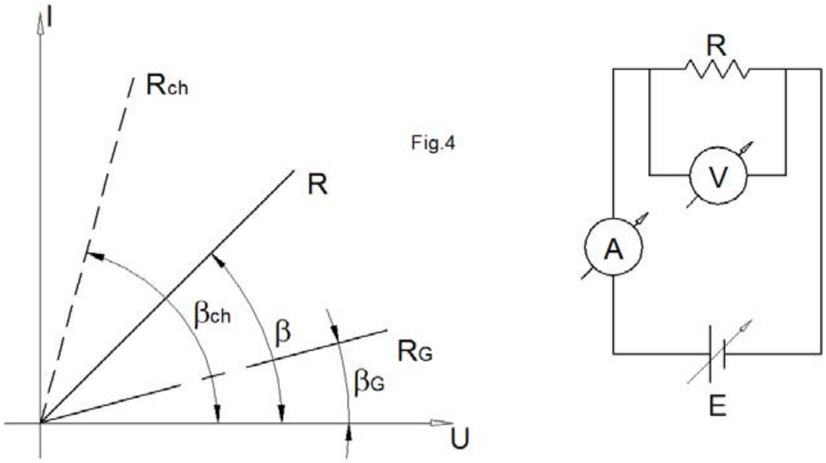


Fig.4

Con el mismo vamos variando la tensión y con los valores obtenidos de corriente construimos una gráfica. En ella observamos que el resultado obtenido es una recta, cuya pendiente representa el valor de $1/R = G = I/V$.
Para demostrar que R varía inversamente con la tangente de β, haremos un cambio de resistencias, colocaremos $R_G > R$ y relevamos la nueva recta. Como vemos en el gráfico $\beta_G < \beta$. Si repetimos la operación de cambio de resistencias colocando ahora $R_{ch} < R$ y realizamos la gráfica, obtenemos una nueva recta donde $\beta_{ch} > \beta$. Como conclusión final podemos escribir que:

$$\mathrm{tg}\beta = G = \frac{1}{R} = \frac{1}{\mathrm{cotg}\beta} \quad \therefore \quad \mathrm{cotg}\beta = R = \frac{U}{I}$$

Se puede decir que para las condiciones extremas, o sea cuando $\beta = 90°$, estamos en presencia de un cortocircuito ideal y para $\beta = 0°$, tenemos un circuito abierto o R infinita.
Generalizamos ahora le ley de Ohm para circuitos no lineales. Para hacer este análisis recurrimos al siguiente circuito. Relevamos la curva de polarización directa del diodo que será:

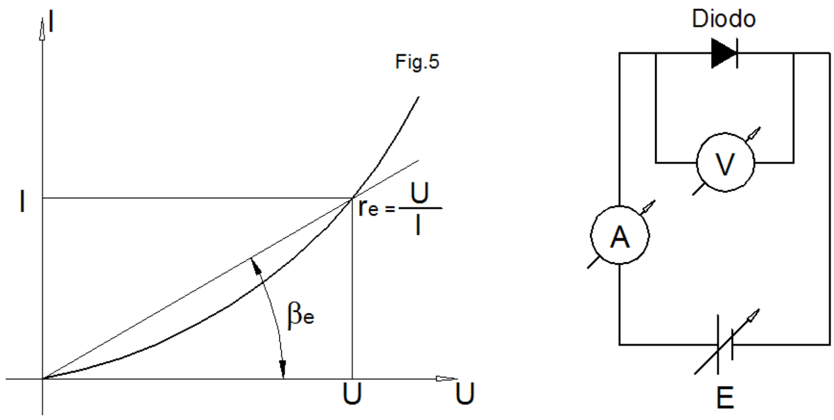


Fig.5

Como vemos a cada punto le corresponde un valor de tensión y otro de corriente, por lo tanto podemos determinar un valor de resistencia (denominada resistencia estática) pero este valor es únicamente válido en un punto y nosotros necesitamos un valor general que defina el comportamiento del diodo, para ello introducimos en dicho circuito una pequeña señal de corriente alterna donde obtendremos el siguiente resultado:

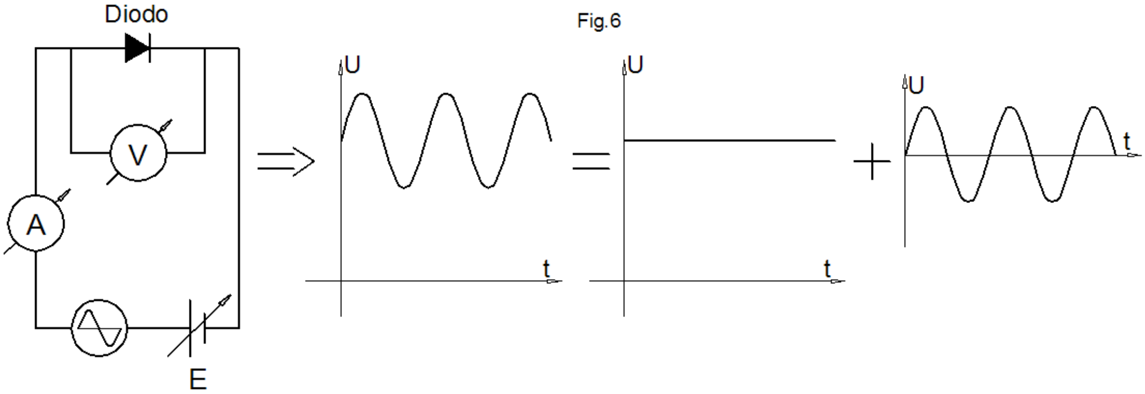


Fig.6

Lo que en la gráfica se traduciría en una fluctuación, en el punto de trabajo, en la respuesta de dicho diodo.

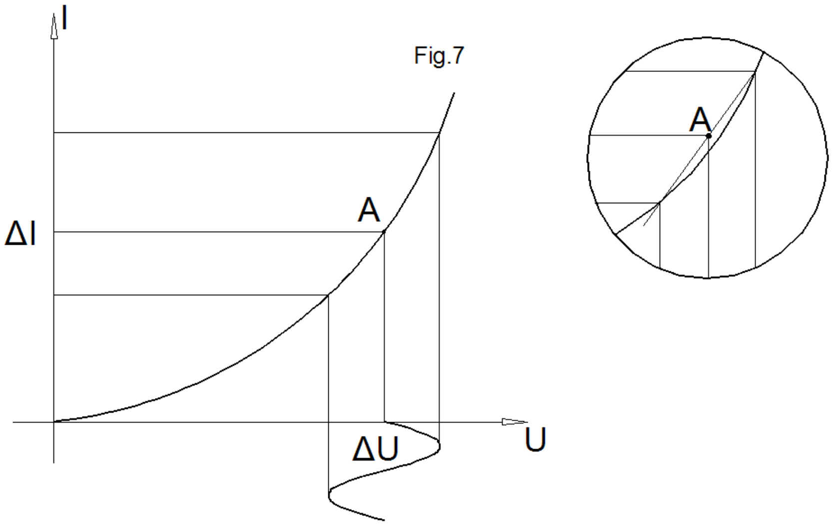


Fig.7

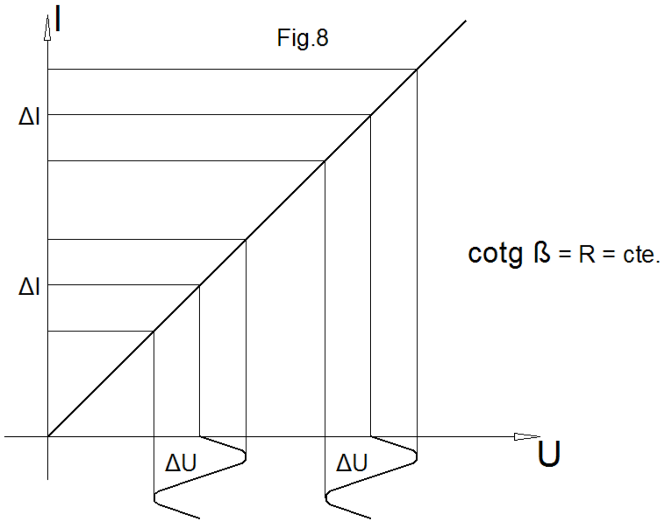
Si calculamos el valor de la resistencia en estas condiciones será:

$$r_d = \frac{\Delta U}{\Delta I}$$

A esta resistencia que fluctúa en el tiempo, se denomina, resistencia dinámica, pero para ser estrictos en su cálculo debemos realizar el análisis de la misma en un entorno muy cercano al punto A para no cometer un error grave, debido a que estamos calculando la cotangente a la curva característica (ver detalle en la gráfica) y no la fluctuación de r_d sobre la misma. Para salvar esta diferencia se debe aplicar el concepto de límite de una función para llegar a la expresión de:

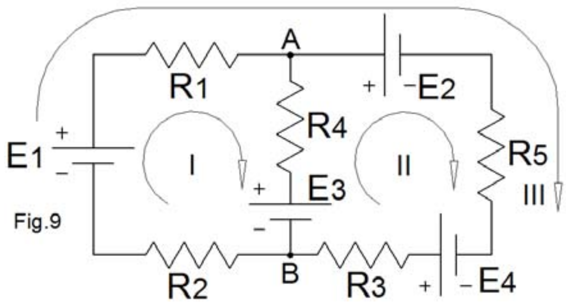
$$r_d = \frac{dU}{dI} \qquad R_{diferencial} = \frac{dU}{dI} \quad \text{Expresión General}$$

Si queremos verificar esta expresión en el caso de un circuito lineal, recordemos que la función a derivar es la de una recta, por lo tanto el resultado es una constante y se cumple perfectamente, ya que es un caso particular dentro de las infinitas funciones.



Definiciones: ***malla, rama, y nodo***

Llamaremos nodo o nudo, a todo punto de un circuito al que concurran tres o más conductores. Una rama es el tramo de un circuito entre dos nodos. Por último, una malla es todo camino cerrado que se puede recorrer en un circuito. Aclaremos estos conceptos con un ejemplo:



En el circuito hay dos nodos: A y B, tres ramas: R_1-E_1-R_2, E_3-R_4, y E_2-R_3-E_4-R_5, y tres mallas I, II y III.

Leyes de Kirchhoff:

Segunda Ley de Kirchoff.

En todo circuito pueden identificarse una o varias mallas, en ellas habrá, en general, generadores y resistencias. La corriente que entregan los generadores (causa), produce en las resistencias caídas de tensión (efecto).

Como la suma de todas las causas sólo puede ser igual a la suma de todos los efectos, se tiene que cumplir lo siguiente:

En una malla la suma de todas las fuerzas electromotrices es igual a la suma de todas las caídas de tensión.

$$\boxed{\sum E = \sum U = \sum (I \cdot R)}$$

O en general (regla de las mallas).

$$\sum U = 0$$

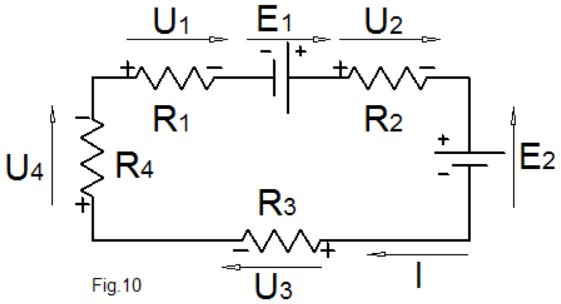


Fig.10

La suma de todas las tensiones parciales a lo largo de un camino cerrado, cuyo sentido de circulación puede elegirse arbitrariamente, es cero.
Todas las magnitudes de tensión cuyos sentidos de referencia coinciden con el de circulación elegido, reciben un signo, mientras que todas las magnitudes de tensión cuyos sentidos de referencia no coinciden con el de circulación elegido, reciben el contrario.
Según la figura, se tienen en el circuito en serie, las relaciones siguientes:

$$U_1 = I \cdot R_1 \quad , \quad U_2 = I \cdot R_2$$

Por tanto

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

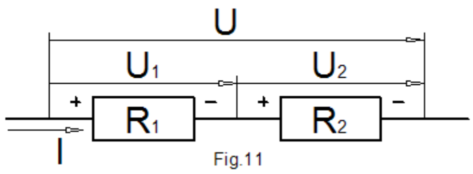


Fig.11

Las caídas de tensión se comportan en el circuito en serie del mismo modo que las resistencias correspondientes.
Con esta afirmación se puede establecer también la relación entre una magnitud parcial cualquiera y la magnitud total:

$$\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Primera Ley de Kirchoff.

En la figura, las resistencias no están dispuestas unas tras otras, sino unas junto a otras (en paralelo). Por consiguiente, un circuito de esta clase se denomina circuito en paralelo (un circuito con derivaciones). En el punto de bifurcación A (nudo o nodo), la intensidad total *I* se divide en las intensidades parciales I_1 e I_2, las cuales se vuelven a unir en el nudo B para nuevamente, tener la intensidad de corriente Total *I*. Como no se pierden portadores de carga durante el recorrido, ni se produce acumulación alguna, se tiene que cumplir en todo nudo la relación siguiente:

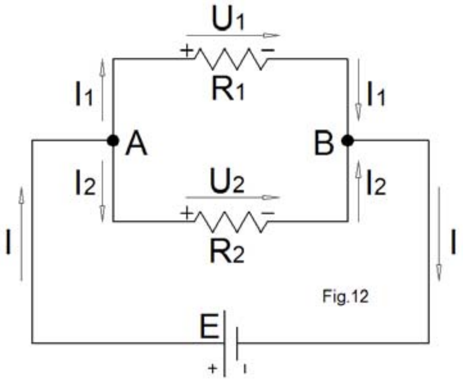
Suma de las corrientes que entran = Suma de las corrientes que salen

$$\boxed{\sum I_e = \sum I_s}$$

O en general (regla de los nudos)

$$\sum I = 0$$

En todos los nudos, la suma de todas las corrientes es igual a cero:
Las corrientes cuyos sentidos (flecha de referencia) apuntan hacia el nudo, reciben un signo, mientras que las corrientes cuyos sentidos (flechas de referencia) se alejan del nudo, reciben el contrario.



Según la figura 12, las resistencias del circuito en paralelo se hallan sometidas a la misma tensión, por lo que resulta:

$$I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2 \qquad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

El comportamiento de las intensidades de corriente parciales es inverso al de las resistencias correspondientes.
Si en la ecuación se pone $I_2 = I - I_1$, se obtiene para la relación de intensidades parcial/total.

$$\frac{I_1}{I} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Es decir, la relación entre una corriente parcial y la total es igual a la existencia entre la resistencia no recorrida por la corriente parcial y la suma de las dos resistencias.

Trabajo Eléctrico.

Los conceptos de intensidad de corriente, tensión y resistencia, estudiados hasta ahora, pertenecen a la electrotecnia. Las magnitudes de trabajo (energía) y potencia a considerar, se encuentran en todas las ramas de las ciencias naturales, constituyendo los órganos de unión entre un sector físico y otro. Si se mueven portadores de carga bajo la presión de la tensión, se realiza un trabajo igual que en el caso de movimientos mecánicos. A magnitud de este trabajo *W* es proporcional a la tensión *E* o *U*, así como a la cantidad de electricidad *Q*, por consiguiente, se tiene para el trabajo de una fuente de energía eléctrica.

$$W = E \cdot Q = E \cdot I \cdot t$$

Y para el trabajo en una caída de tensión

$$W = U \cdot Q = U \cdot I \cdot t$$

Si se introduce la Ley de Ohm, se transforma la ecuación en:

$$W = I^2 \cdot R \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t$$

Al reemplazar las unidades de la tensión, la intensidad de corriente y el tiempo, resulta como unidad de trabajo eléctrico o energía eléctrica el volt amperio-segundo [VAs].
Planteando a la potencia como el trabajo en la unidad de tiempo, tenemos:

1V . 1A = 1W (Watt) = (Julio/segundo)

Potencia Eléctrica.

El cociente trabajo-tiempo se define en general como potencia. Por tanto, de las ecuaciones resulta:

Potencia eléctrica de una fuente de energía:

$$P = \frac{W}{t} = E \cdot I$$

Y la potencia de una caída de tensión:

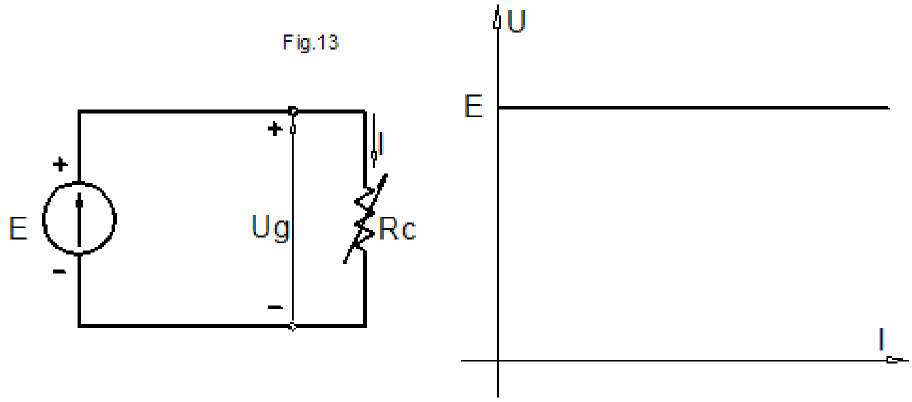
$$P = \frac{W}{t} = U \cdot I = I^2 \,.\, R = \frac{U^2}{R}$$

Fuentes

Fuentes de Tensión

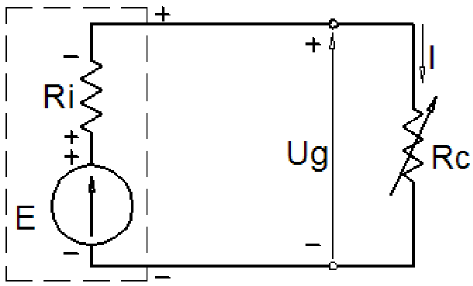
Una fuente de tensión es un generador que mantiene la tensión en bornes constante, en forma independiente de la corriente que circula por ella.

Fig.13

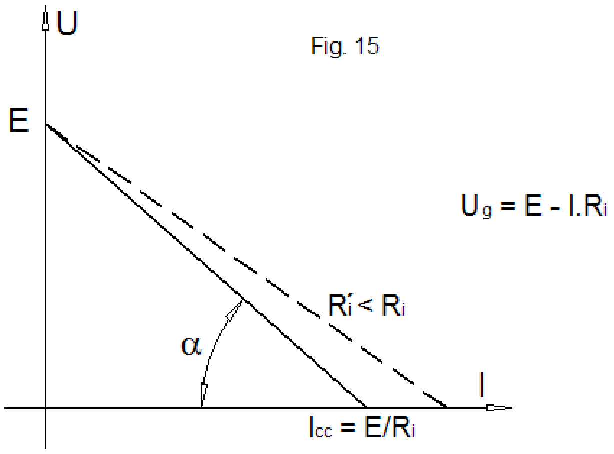


En la figura se ve una fuente de tensión conectada a una resistencia variable, R_C, con la que obtenemos los diferentes valores de corriente y relevamos la gráfica.
Esta fuente de tensión es ideal, ya que un cortocircuito en sus bornes haría circular una corriente infinita, hecho que no se cumple en la realidad.
Una fuente de tensión real se puede representar como:

Fig.14



La resistencia R_i depende del tipo de generador y no tiene porque ser constante aunque en la mayoría de los así se la considera.
Situándonos en el caso R_i = *cte*, podemos trazar la característica tensión-corriente.



La recta corresponde a la ecuación planteada y su pendiente es:

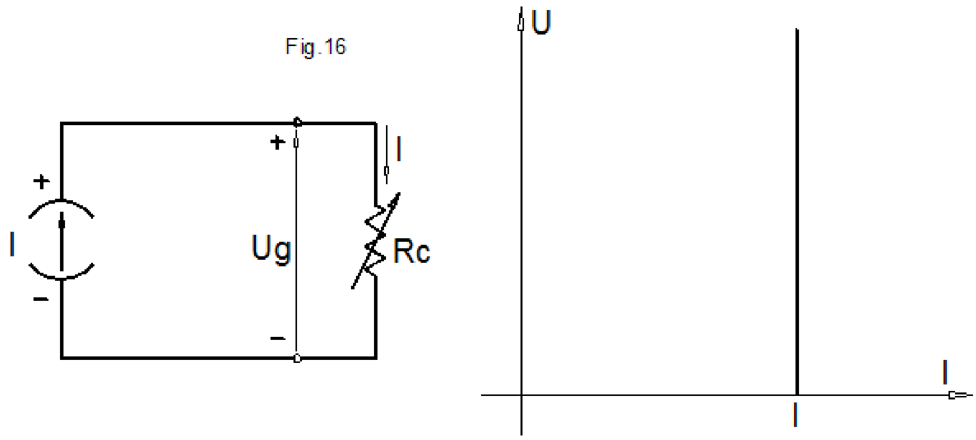
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{E}{I_{cc}} = \frac{E}{\frac{E}{R_i}} = R_i$$

Si la resistencia interna fuera $R_i^{1'} < R_i$ la característica sería la indicada en línea de trazos. Puede verse, que cuando R_i disminuye, la curva se acerca a la de una fuente ideal. Concluimos entonces en que la resistencia interna de una fuente ideal es nula.

Fuente de Corriente

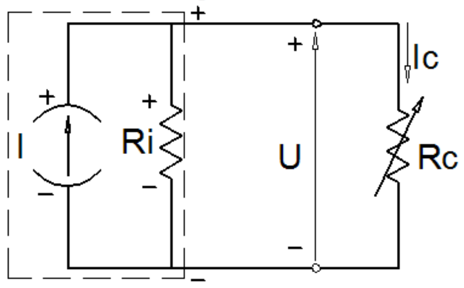
Una fuente de corriente es un generador tal, que hace circular por la carga una corriente constante, para cualquier valor de resistencia.

Fig.16



Al variar R_C, varía la caída de tensión $I \cdot R$ y así la tensión en bornes de la fuente.
Nótese que este generador opera perfectamente en cortocircuito, no así a circuito abierto, donde presenta infinita tensión en bornes.
Al igual que con la fuente de tensión, no existe un generador de corriente constante que tenga infinita tensión en sus bornes, al quedar en circuito abierto.
Se representa a la fuente de corriente real como:

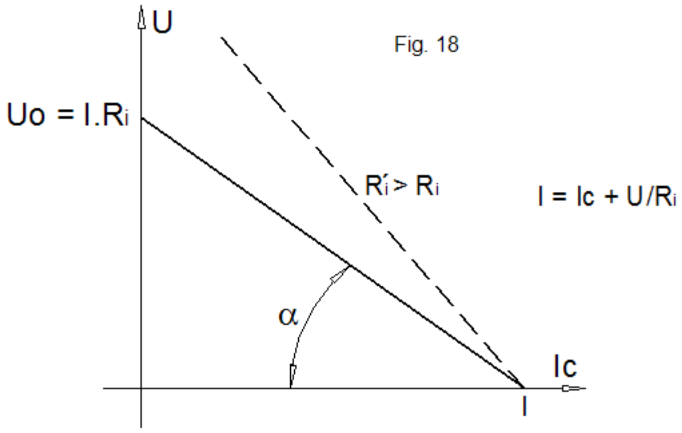
Fig.17



La característica tensión-corriente del generador es:
La pendiente de la recta es:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{U_0}{I} = \frac{I \cdot R_i}{I} = R_1$$

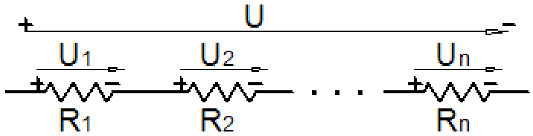
Al aumentar la resistencia R_i, la pendiente aumenta, y la característica de la fuente se va acercando a la fuente ideal, vemos entonces, que para dicha fuente es $Ri \rightarrow \infty$.



Asociación de Resistencias

Asociación en Serie

Dos o más resistencias están en serie cuando el final de una resistencia se conecta al principio de otra resistencia, presentando un único camino para la circulación de corriente.



Podemos reemplazar un conjunto de *n* resistencias en serie por una única resistencia $R_{e\ serie}$.
Aplicando la segunda Ley de Kirchoff al circuito se obtiene:

$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

La resistencia equivalente $R_{e\ serie}$ debe cumplir la Ley de Ohm, o sea:

$$R_{e\,serie} = \frac{U}{I} = \frac{U_1 + U_2 + \ldots + U_n}{I} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} + \cdots + \frac{U_n}{I}$$

Pero cada resistencia debe cumplir con la Ley de Ohm:

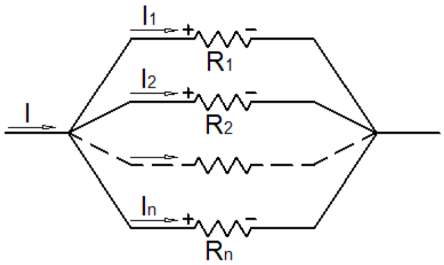
$$R_1 = \frac{U_1}{I}\ ,\ R_2 = \frac{U_2}{I}\ ,\cdots,\ R_n = \frac{U_n}{I}$$

Reemplazando

$$\boxed{R_{e\,serie} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n}$$

Asociación en Paralelo

Dos o más resistencias están en paralelo cuando todos los comienzos concurren a un punto común (nodo) y todos los finales a otro común (nodo).



Al igual que en el caso anterior, vamos a reemplazar al conjunto por una única resistencia equivalente $R_{e\,paral}$, tal que:

$$R_{e\,paral} = \frac{U}{I}$$

Por la segunda Ley de Kirchoff:

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

Y por Ley de Ohm

$$R_1 = \frac{U}{I_1} \;,\; R_2 = \frac{U}{I_2} \;,\; \cdots \;, R_n = \frac{U}{I_n}$$

Haciendo el cociente:

$$\frac{I}{U} = \frac{1}{R_{e\,paral}} = \frac{I_1 + I_2 + \cdots + I_n}{U} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} + \cdots + \frac{I_n}{U}$$

$$\boxed{\frac{1}{R_{e\,paral}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}}$$

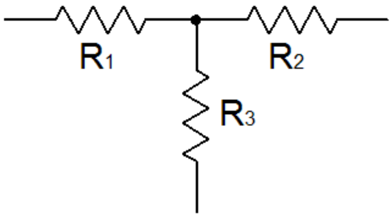
En el caso particular de dos resistencias en paralelo, caso muy frecuente, podemos trabajar con la expresión:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}$$

$$\boxed{R_{12} = \frac{R_1 \,.\, R_2}{R_1 + R_2}}$$

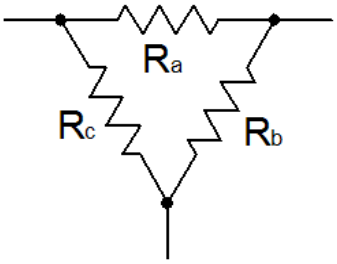
Asociación en Estrella

Tres resistencias se encuentra en estrella cuando solo uno de los bornes de cada una de ellas forman un punto común (nodo) y el borne restante concurre a puntos (nodos) no comunes.



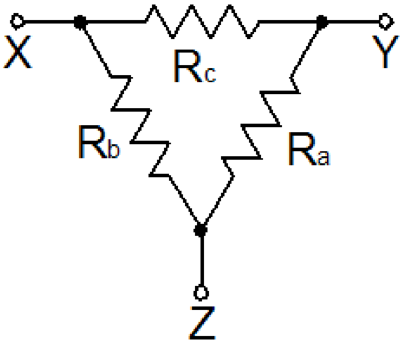
Asociación en Triángulo

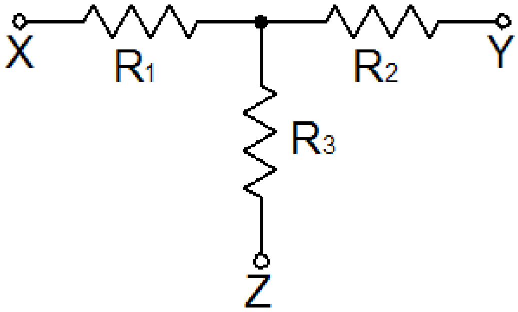
Tres resistencias están en triángulo cuando el principio de cada una de ellas está unido al final de la siguiente, pero a cada punto pueden llegar otra ramas.



Transformación Estrella Triángulo

Un sistema en estrella puede ser transformado en un sistema en triángulo y viceversa.
Sea un sistema en triángulo R_a R_b R_c, que se desea convertir en la estrella equivalente R_1 R_2 R_3.
Dos sistemas eléctricos son equivalentes cuando vistos desde los mismos bornes, presentan las mismas relaciones entre tensiones y corrientes, es decir, la resistencia vista es la misma.





Mirando el sistema desde X-Y, tenemos:

$$R_{XY} = R_1 + R_2 \text{ (estrella)}$$

$$R_{XY} = \frac{R_c \cdot (R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c} \text{ (triángulo)}$$

$$R_1 + R_2 = \frac{R_c \cdot (R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c} = \frac{R_a \cdot R_c + R_b \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad (1)$$

Mirando desde X-Z

$$R_{XZ} = R_1 + R_3 \text{ (estrella)}$$

$$R_{XZ} = \frac{R_b \cdot (R_a + R_c)}{R_a + R_b + R_c} \text{ (triángulo)}$$

$$R_1 + R_3 = \frac{R_b \cdot (R_a + R_c)}{R_a + R_b + R_c} = \frac{R_a \cdot R_b + R_c \cdot R_b}{R_a + R_b + R_c} \quad (2)$$

Mirando desde Y-Z

$$R_{YZ} = R_2 + R_3 \text{ (estrella)}$$

$$R_{YZ} = \frac{R_a \cdot (R_b + R_c)}{R_a + R_b + R_c} \text{ (triángulo)}$$

$$R_2 + R_3 = \frac{R_a \cdot (R_b + R_c)}{R_a + R_b + R_c} = \frac{R_a \cdot R_b + R_a \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad (3)$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2), tenemos:

$$2R_1 + R_2 + R_3 = \frac{R_a \cdot R_c + R_b \cdot R_c + R_a \cdot R_b + R_c \cdot R_b}{R_a + R_b + R_c} \quad (4)$$

Y ahora restando las ecuaciones (4) y (3), tenemos:

$$2R_1 = \frac{R_a \cdot R_c + R_b \cdot R_c + R_a \cdot R_b + R_c \cdot R_b - R_a \cdot R_b - R_a \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c} = \frac{2 \cdot R_b \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$\boxed{R_1 = \frac{R_b \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c}}$$

Sumando las ecuaciones (1) y (3), tenemos:

$$2R_2 + R_1 + R_3 = \frac{R_a \cdot R_c + R_c \cdot R_b + R_a \cdot R_b + R_a \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad (5)$$

Restando las ecuaciones (5) y (2), tenemos:

$$2R_2 = \frac{2 \cdot R_a \cdot R_c + R_c \cdot R_b + R_a \cdot R_b + R_c \cdot R_a - R_b \cdot R_c - R_a \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c} = \frac{2 \cdot R_a \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$\boxed{R_2 = \frac{R_a \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c}}$$

Sumando las ecuaciones (2) y (3), tenemos:

$$2R_3 + R_1 + R_2 = \frac{R_a \cdot R_b + R_c \cdot R_b + R_a \cdot R_b + R_a \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad (6)$$

Restando las ecuaciones (6) y (1), tenemos:

$$2R_3 = \frac{2 \cdot R_a \cdot R_b + R_c \cdot R_b + R_a \cdot R_b + R_c \cdot R_a - R_b \cdot R_c - R_a \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c} = \frac{2 \cdot R_a \cdot R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

$$\boxed{R_3 = \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b + R_c}}$$

Del mismo modo, que se realizó la transformación de triángulo a estrella, se realiza la transformación de estrella a triángulo, llegando a las siguientes expresiones finales.

$$R_a = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}{R_1}$$

$$R_b = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}{R_2}$$

$$R_c = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}{R_3}$$

Resolución de Circuitos por Reducción de Resistencias.

Este método es aplicable solo en el caso de una fuente única, ya sea ésta de tensión o de corriente.
Consiste en identificar los conjuntos de resistencias en serie, en paralelo, en estrella, o en triángulo, y reducirlos hasta hallar un único valor equivalente R_e. A partir de aquí, se calculan los valores de tensiones y corrientes, expandiendo nuevamente el circuito, hasta llegar a su forma original.
Más adelante se aclarará este concepto con un ejemplo.

Resolución de Circuitos en General

Un circuito genérico está integrado por un número de ramas, que forman mallas y nodos. Resolver un circuito significa hallar todos los valores de las corrientes, de rama y su sentido de circulación, eventualmente podrán calcularse las tensiones. Para ello debemos componer un sistema de tantas ecuaciones independientes como corrientes de rama incógnitas tengamos y como circula una sola corriente por cada rama será:

Número de Ecuaciones = Números de Ramas

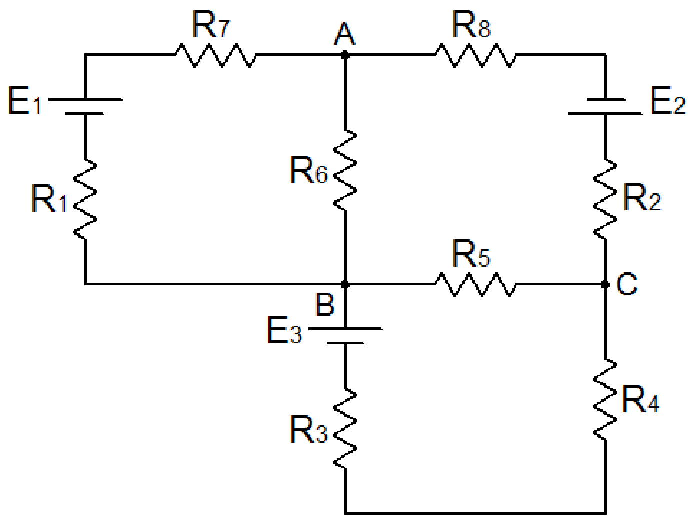
Para asegurarnos de que las ecuaciones son independientes debemos elegir:

Número de Ecuaciones de Nodos = Número de Nodos – 1

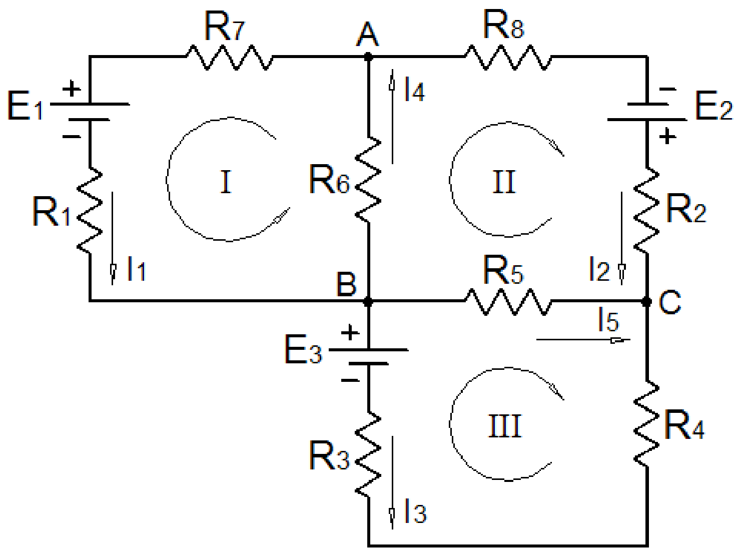
En efecto, como no hay acumulación, ni drenaje de corriente en ningún punto del circuito, la suma de todas las corrientes es nula, por lo tanto la última ecuación es superabundante.
Debemos completar el sistema con ecuaciones de malla. Al escribir estas ecuaciones para la Segunda Ley de Kirchoff, es importante que se cubran todas las ramas de la red. En muchos casos se eligen las mallas sucesivamente de forma tal, que cada nueva malla incluya a menos una rama que no haya sido considerada anteriormente.
En el caso que en el circuito, haya fuentes de corriente, se eliminan tantas incógnitas como fuentes haya, lo que implica que se deben descartar las ecuaciones correspondientes a mallas que incluyen dichas fuentes.

Resolución de un circuito por la aplicación simultánea de las Leyes de Kirchoff.

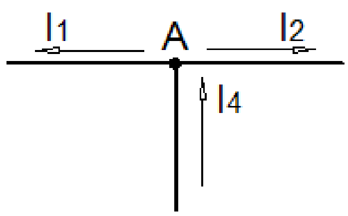
Este método se basa en la formulación del sistema de ecuaciones por aplicación directa de las Leyes de Kirchoff.
Se expondrán a continuación una serie de reglas para escribir las ecuaciones de nodos y de mallas, reglas que tienen sólo validez para las convenciones de signos en uso, y que pueden variar si éstas cambian.
Sea un circuito como el de la figura:



Este circuito posee tres nodos A, B, y C y cinco ramas: (R_7 E_1 R_1), (R_6), (R_8 E_2 R_2), (R_5) y (E_3 R_3 R_4). Habrá, por lo tanto, cinco corrientes incógnitas (una por cada rama). Debemos escribir dos ecuaciones de nodo y tres de malla. Así asignamos sentidos arbitrarios a todas las corrientes y elegimos tres caminos de circulación, con indicación del sentido, también arbitrario.

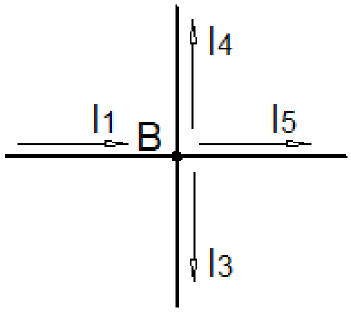


Nótese que cada una de las mallas elegidas tienen una rama no común con las otras dos.
Para escribir las ecuaciones de nodos, colocamos en el primer miembro las corrientes entrantes y en el segundo a las salientes. Así para el nodo A se tiene:



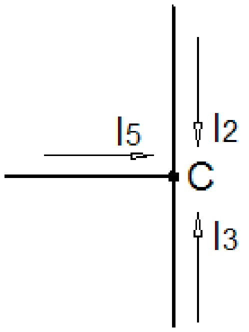
$$I_4 = I_1 + I_2 \qquad (1)$$

Para en nodo B:



$$I_1 = I_3 + I_4 + I_5 \qquad (2)$$

Y para en nodo C:



$$I_3 + I_4 + I_5 = 0 \qquad (3)$$

Debemos elegir dos de las tres ecuaciones. Obviamente, se tomarán las más sencillas, en este caso la de los nodos A y C.
Para escribir las ecuaciones de malla pondremos en el primer miembro a las fuerzas electromotrices y en el segundo a las caídas de tensión.
Una fuerza electromotriz es positiva cuando al circular en el sentido elegido por dentro del generador, el potencial sube (circulación de negativo a positivo).
Una caída de tensión es positiva cuando el sentido de circulación coincide con el de la corriente.
Con este criterio podemos escribir, para la malla I:

$$-E_1 = I_1 . R_1 + I_4 . R_6 + I_1 . R_7 \qquad (4)$$

Para la malla II:

$$E_2 = I_2 . R_2 - I_5 . R_5 + I_4 . R_6 + I_2 . R_8 \qquad (5)$$

Y para la malla III:

$$E_3 = I_5 . R_5 - I_3 . R_4 - I_3 . R_3 \qquad (6)$$

Todavía podríamos obtener más ecuaciones de mallas, pero que no serían independientes.
En definitiva el sistema estará compuesto por las ecuaciones (1), (2), (4), (5) y (6), que se resolverá por alguno de los métodos (ver apéndice final).

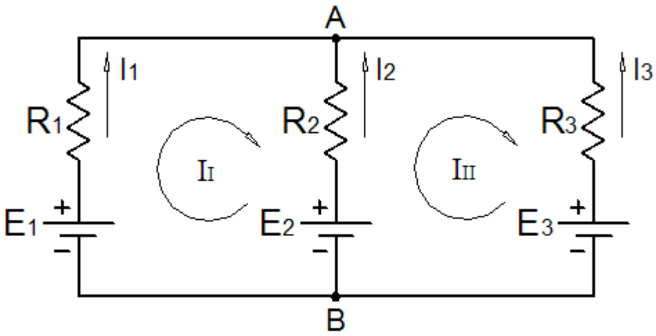
Método de las Corrientes de Malla.

En el método de las corrientes de malla, se asigna una corriente a cada malla independiente y arbitraria.
Las ecuaciones se escriben en función de las corrientes de malla.
Una vez resuelto el sistema de ecuaciones, las corrientes en las ramas se obtienen en base a las corrientes de malla.
El número de ecuaciones necesarias es:

Ecuaciones = Mallas Independientes = r – r_{fc} – n +1

Donde:
r = número de ramas
r_{fc} = número de ramas que contienen fuentes de corriente

n = número de nodos
Veamos en un ejemplo los distintos pasos a seguir, para ello trabajaremos en el siguiente circuito.



Observemos el circuito, vemos que hay 3 ramas, ninguna fuente de corriente y 2 nodos, osea que el número de ecuaciones a plantear es:

Ecuaciones = Mallas Independientes = r – r_{fc} – n +1 = 3 – 0 – 2 + 1 = 2

Asignamos los sentidos a las corrientes de malla. Tal como se ve en la figura, hemos adoptado arbitrariamente el sentido de circulación horario para las corrientes de malla I_I e I_{II}.
El planteo de las ecuaciones será:
Para la malla I, resulta:

$$R_1 \cdot I_I + R_2 \cdot (I_I - I_{II}) = E_1 - E_2$$

O bien:

$$(R_1 + R_2) \cdot I_I - R_2 \cdot I_{II} = E_1 - E_2$$

Obsérvese que en la rama común a las mallas, la corriente ((I_I - I_{II}) se dirige hacia abajo.
Para la malla II, resulta:

$$- (I_I - I_{II}) \cdot R_2 + R_3 \cdot I_{II} = E_2 - E_3$$

O bien:

$$- R_2 \cdot I_I + (R_2 + R_3) \cdot I_{II} = E_2 - E_3$$

Agrupándolas resulta:

$$A \quad \begin{cases} (R_1 + R_2) \cdot I_I - R_2 \cdot I_{II} = E_1 - E_2 \\ - R_2 \cdot I_I + (R_2 + R_3) \cdot I_{II} = E_2 - E_3 \end{cases}$$

Por otro lado consideramos el siguiente sistema de ecuaciones

$$B \quad \begin{cases} R_{11} \cdot I_I + R_{12} \cdot I_{II} = E_I \\ R_{12} \cdot I_I + R_{22} \cdot I_{II} = E_{II} \end{cases}$$

Comparando los sistemas A y B resulta:

$R_{11} = R_1 + R_2$ (es la suma de las resistencias que se encuentran al circular por la malla I)
$R_{12} = - R_2$ (resistencia de la rama común a las malla I y II)
$R_{21} = - R_2$ (resistencia de la rama común a las malla I y II)
$R_{22} = R_2 + R_3$ (es la suma de las resistencias que se encuentran al circular por la malla II)
E_I = es la suma algebraica de las f.e.m. al circular por la malla I
E_{II} = es la suma algebraica de las f.e.m. al circular por la malla II

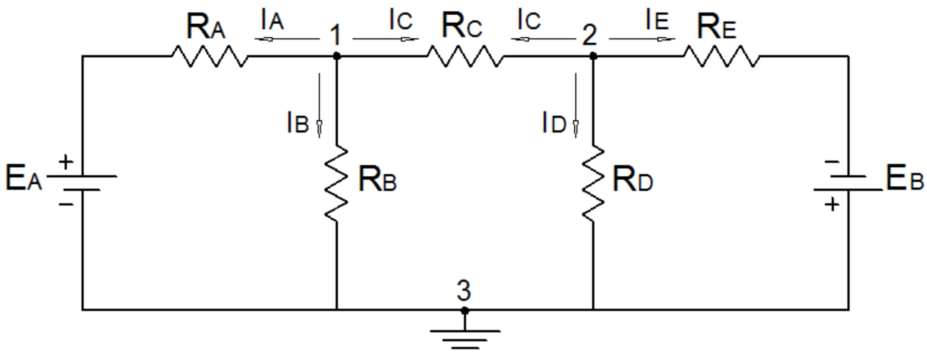
El signo menos proviene del hecho que hemos asignado corrientes de malla que en la rama común tienen sentido contrario, en cambio, si la circulación fuera en la misma dirección, el signo sería positivo.

A partir del sistema de ecuaciones A, utilizando cualquiera de los métodos de resolución de ecuaciones hallamos I_I e I_{II}.
Con las corrientes de mallas obtenidas, se calculan las corrientes de rama, a saber:

$$I_1 = I_I$$
$$I_2 = -(I_I - I_{II}) = I_{II} - I_I$$
$$I_3 = -I_{II}$$

Método de las Tensiones o Potenciales en los Nodos.

Un nodo es un punto de un circuito común a dos o más elementos del mismo. Si en un nodo se unen tres o más elementos, tal nodo se llama principal. A cada nodo se le puede asignar un número o una letra. En la figura 1, 2 y 3 son nodos principales. El potencial en un nodo, es la diferencia de potencial entre este nodo respecto de otro, denominado nodo de referencia.



Se ha elegido el nodo 3 como nodo de referencia. Entonces U_{13} es la diferencia de potencial entre los nodos 1 y 3.
Cuando las tensiones o diferencias de potencial en los nodos se toman siempre respecto de un nodo de referencia dado, se emplea la notación U_1 en lugar de U_{13}. El método de las tensiones en los nodos consiste en determinar las tensiones en los todos los nodos principales respecto del nodo de referencia.
Aplicando la primera de Ley de Kirchoff a los dos nodos principales 1 y 2, se obtienen dos ecuaciones con las incógnitas U_1 y U_2. Se propone que todas las corrientes de las ramas sean salientes del nodo, de esta forma, la suma de todas las corrientes es cero (suma de las corrientes que entran = Suma de las corrientes que salen).
Para el nodo 1 será:

$$I_A + I_B + I_C = 0$$

$$\frac{U_1 - E_A}{R_A} + \frac{U_1}{R_B} + \frac{U_1 - U_2}{R_C} = 0$$

Para el nodo 2 será:

$$I_C + I_D + I_E = 0$$

$$\frac{U_2 - U_1}{R_C} + \frac{U_2}{R_D} + \frac{U_2 + E_B}{R_E} = 0$$

Operando y agrupando en las ecuaciones del nodo 1 y del nodo 2 se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en función de U_1 y U_2

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}\right).U_1 - \frac{1}{R_C}.U_2 = \frac{E_A}{R_A} \\ -\frac{1}{R_C} + \left(\frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_D} + \frac{1}{R_E}\right).U_2 = -\frac{E_B}{R_E} \end{cases}$$

Teoremas de Circuitos

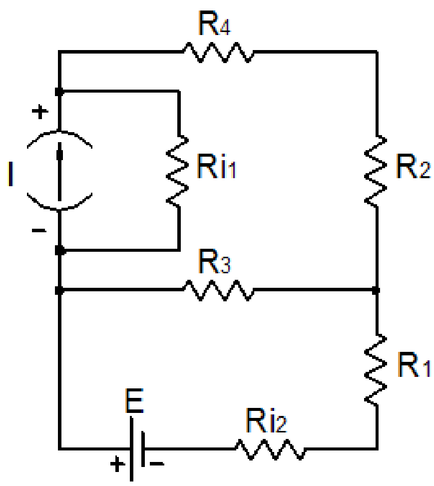
Teorema de Superposición de Efectos

Este teorema es aplicable a toda la Física y se enuncia:
En todo sistema lineal, el efecto total creado por varias causas, es igual a la suma de los efectos creados por cada una de las causas actuando solas.
Un sistema lineal se define matemáticamente por:

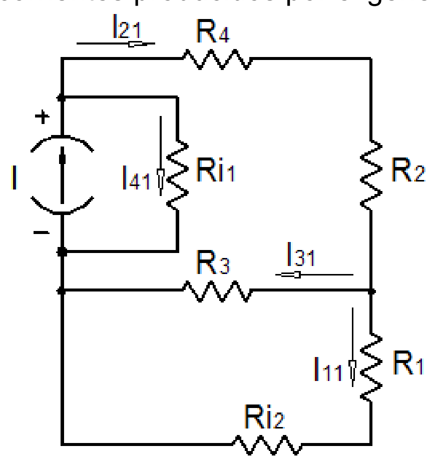
$$f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$$

$$f(Ax) = A\,f(x)$$

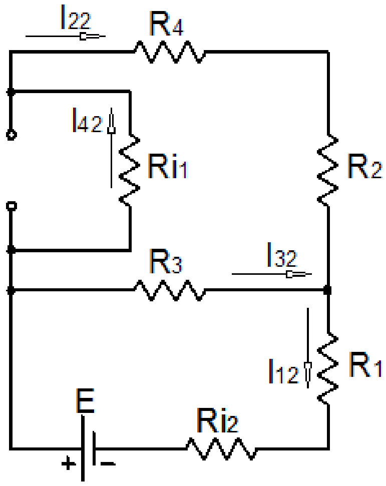
En el campo de la electrotecnia, este teorema puede enunciarse de la siguiente manera:
En todo circuito lineal, las tensiones y corrientes que aparecen en él por la acción conjunta de varias fuentes, son iguales a la suma de las tensiones y corrientes que se obtienen haciendo actuar a dichas fuentes de a una y reemplazando a las restantes por su resistencia interna.
Un circuito lineal es todo aquel circuito donde las resistencias, las fuerzas electromotrices y corrientes de generadores sean constantes. Debe tenerse especial precaución con esta condición, ya que elementos comunes, tales como diodos, transistores, reguladores, motores, lámparas, no presentan características lineales, lo que imposibilita la aplicación de este teorema.
Veamos como se aplica este teorema en un caso concreto:



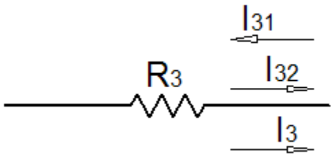
En este circuito vemos que hay dos fuentes (el número es ilimitado) con sus resistencias internas. Obtendremos primero las corrientes producidos por el generador de corriente constante:



Nótese que la fuente de tensión fue reemplazada por un cortocircuito. Las corrientes pueden hallarse por cualquier método, pero generalmente conviene el de reducciones sucesivas, con el que además se obtienen siempre signos positivos para los sentidos adoptados.
En el segundo paso hacemos actuar a la fuente de tensión y reemplazamos al generador de corriente por un circuito abierto:

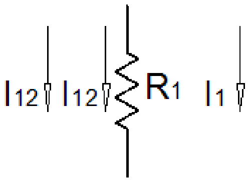


Ahora hallamos las nuevas corrientes (siempre con su signo).
Para encontrar las corrientes reales en cada rama, sumamos las corrientes obtenidas en cada paso, asumiendo previamente un sentido positivo. Por ejemplo, en la resistencia R_3:



$$I_3 = I_{32} - I_{31}$$

O en la resistencia R_1

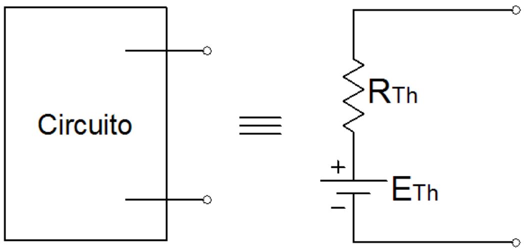


$$I_1 = I_{11} + I_{12}$$

Así se obtienen todas las corrientes, procediendo en forma análoga con las tensiones.

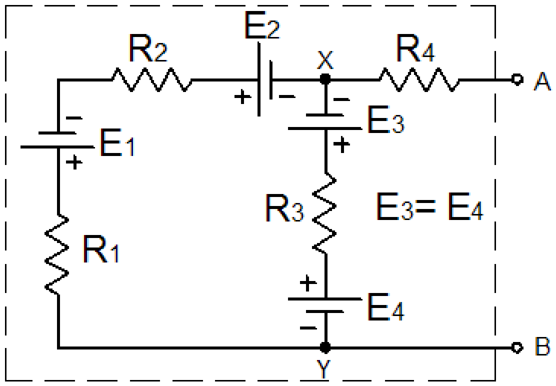
Teorema de Thevenin

El teorema de Thevenin sirve para reemplazar un circuito complicado, o parte de él, por una configuración equivalente.
Dos circuitos equivalentes, son dos circuitos tales que presentan la misma característica tensión-corriente en bornes.
Este teorema se enuncia:
Todo circuito lineal con fuentes de energía, ya sean de tensión o de corriente, puede reemplazarse por una única fuente de tensión en serie con una única resistencia.

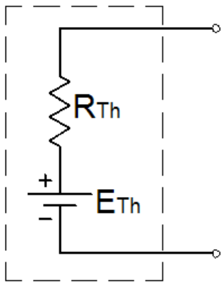


La equivalencia de ambos circuitos puede comprobarse conectando en sus bornes una carga cualquiera, que puede ser lineal o no. Los valores de tensión y corriente serán idénticos.

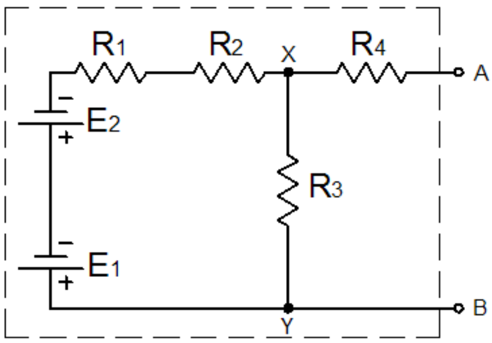
El valor de la tensión de Thevenin E_{Th} es la que aparece con los bornes a circuito abierto y la resistencia de Thevenin R_{Th}, es la resistencia vista desde los bornes del circuito con todas las fuentes reemplazadas por su resistencia interna.
Veamos como se aplica el teorema en el ejemplo:
Tenemos un generador cuyo circuito es:



Y queremos simplificarlo hasta:



Aplicando la segunda Ley de Kirchoff en el circuito observamos que los generadores E_3 y E_4 se anulan mutuamente, en tanto que los generadores E_1 y E_2 suman entre sí.



Sabemos que $E_{Th} = U_{AB}$, cuando el circuito no posee resistencia de carga (a bornes abiertos). En estas condiciones la resistencia R_4 no será atravesada por corriente alguna, lo que equivale a decir que en ella no existirá caída de tensión. Por lo tanto:

$$E_{Th} = U_{AB} = U_{XY} = U_{R3}$$

Aplicando la segunda Ley de Kirchoff a la correspondiente malla obtenemos:

$$E_1 + E_2 = U_{R1} + U_{R2} + U_{R3}$$

De acuerdo con la Ley de Ohm:

$$E_1 + E_2 = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3$$

Sacando I factor común:

$$E_1 + E_2 = I\,(R_1 + R_2 + R_3)$$

Dividiendo ambos miembros por $(R_1 + R_2 + R_3)$, la igualdad no varía:

$$\frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2 + R_3} = I \qquad (1)$$

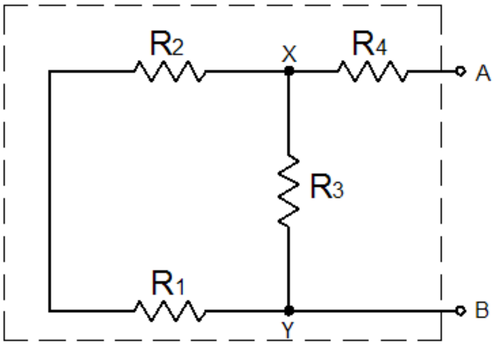
Aplicando la Ley de Ohm:

$$E_{Th} = U_{R3} = I \;.\; R_3$$

Reemplazando I por su igualdad de (1)

$$\boxed{E_{Th} = U_{R3} = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2 + R_3} \,.\, R_3}$$

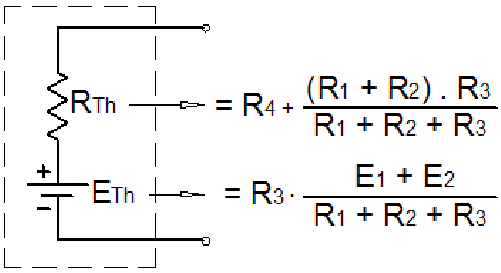
Para calcular R_{Th} debemos desactivar los generadores, por lo que el circuito queda:



No debemos olvidar que tenemos generadores ideales de tensión:

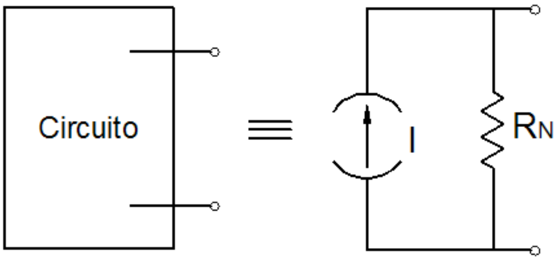
$$\boxed{R_{Th} = R_{AB} = R_4 + \frac{(R_1 + R_2)\,.\,R_3}{R_1 + R_2 + R_3}}$$

En conclusión el circuito complejo que teníamos en primer momento ha quedado simplificado en:

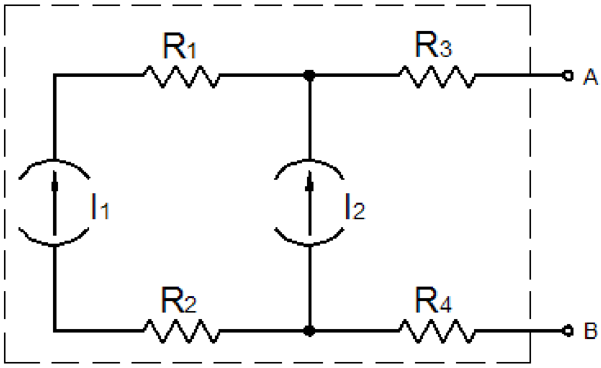


Teorema de Norton

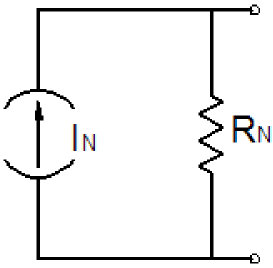
El teorema de Norton sirve para reemplazar un circuito complicado, o parte de él, por una configuración equivalente.
Este teorema se enuncia:
Todo circuito lineal con fuentes de energía, ya sean de tensión o de corriente, puede reemplazarse por una única fuente de corriente en paralelo con una única resistencia.
La equivalencia de ambos circuitos puede comprobarse conectando en sus bornes una carga cualquiera, que puede ser lineal o no. Los valores de tensión y corriente serán idénticos.
El valor de la corriente de Norton es el que aparece con los bornes, en cortocircuito y la resistencia de Norton es la resistencia vista desde los bornes del circuito con todas las fuentes reemplazadas por su resistencia interna.



Veamos como se aplica el teorema, sea el siguiente circuito:

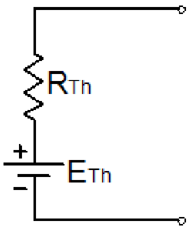


Y se quiere simplificar hasta:

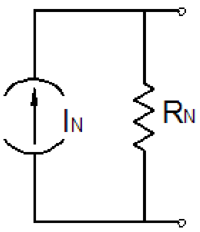


Para hallar el equivalente se pueden utilizar cualquiera de los métodos ya conocidos.

Nota 1: cabe destacar que hablar de resistencia de Thevenin R_{Th} o resistencia de Norton R_N es exactamente equivalente, ambas tienen el mismo valor.
Nota 2: Teniendo el equivalente de Thevenin se calcula la corriente de Norton cortocircuitando los bornes del circuito, y para determinar la tensión de Thevenin partiendo del equivalente de Norton es simplemente el producto I_N . R_N.



$$\Rightarrow I_N = \frac{E_{Th}}{R_{Th}}$$

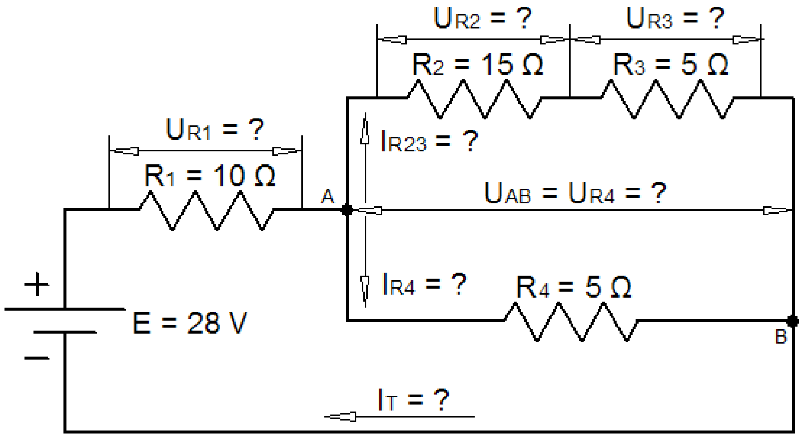


$$\Rightarrow E_{Th} = I_N \, . \, R_N$$

Resolución de circuitos.

Resolución de circuitos con una sola fuente de alimentación. Análisis gráfico-analítico.

Sea el circuito de la figura:

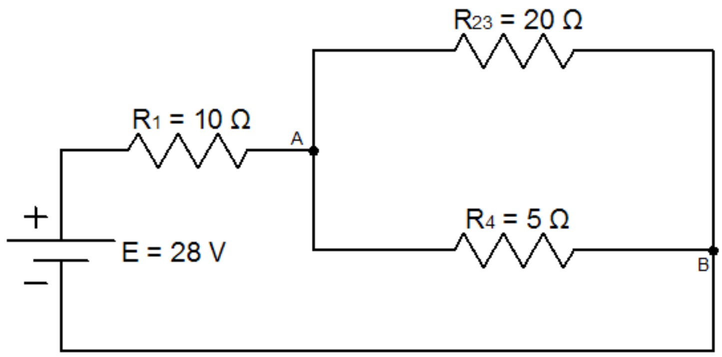


Como podemos apreciar estamos en presencia de un circuito serie-paralelo. El objetivo es determinar todas las incógnitas presentadas, para ello debemos llegar a la mínima expresión del circuito para poder determinar la I_T, entonces debemos determinar la R_T, por lo tanto, comenzamos reduciendo el circuito, de la siguiente manera:

a.- Determinar R_{23}, que están en serie.

$$R_{23} = R_2 + R_3 = 15\ \Omega + 5\ \Omega = 20\ \Omega$$

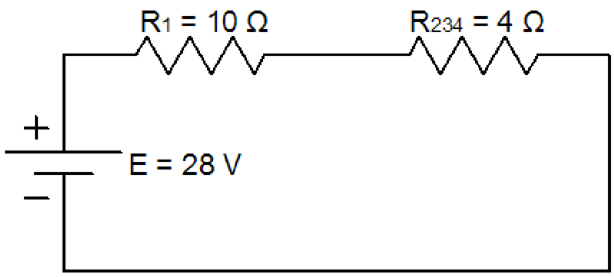
Quedando el circuito así:



b.- Determinar R_{234}, donde R_{23} está en paralelo con R_4

$$R_{234} = \frac{R_{23}\,.\,R_4}{R_{23} + R_4} = \frac{20\,\Omega\,.\,5\,\Omega}{20\,\Omega + 5\,\Omega} = 4\,\Omega$$

Quedando el circuito así:



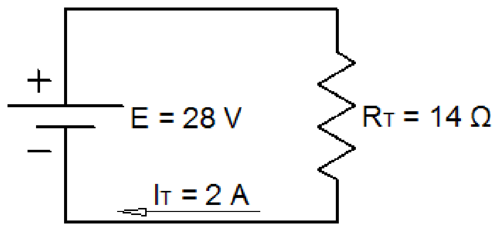
c.- Determinar R_T, donde R_1 está en serie con R_{234}

$$R_T = R_1 + R_{234} = 10\ \Omega + 4\ \Omega = 14\ \Omega$$

d.- Ahora podemos determinar I_T, aplicando la ley de Ohm.

$$I_T = \frac{E}{R_T} = \frac{28\ V}{14\ \Omega} = 2\ A$$

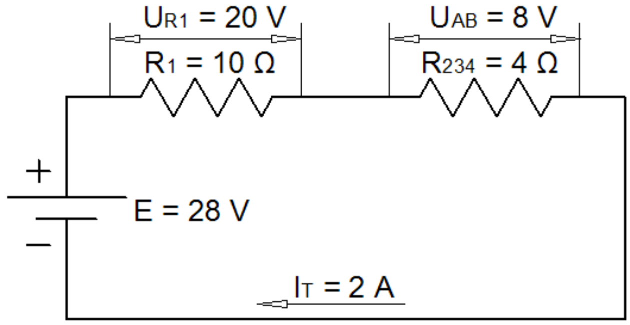
Siendo el circuito de cálculo el siguiente:



e.- A continuación, comenzamos a recalcular al revés, teniendo la I_T, estamos en condiciones de calcular las tensiones U_{R1} y U_{R234} o U_{AB}.

$$U_{R1} = I_T \,.\, R_1 = 2\ A \,.\, 10\ \Omega = 20\ V$$

$$U_{AB} = U_{R234} = I_T \,.\, R_{234} = 2\ A \,.\, 4\ \Omega = 8\ V$$



También se podría haber calculado una de las tensiones por la segunda ley de Kirchoff, en lugar de la ley de Ohm, por ejemplo:

$$U_{AB} = E - U_{R1} = 28\ V - 20\ V = 8\ V$$

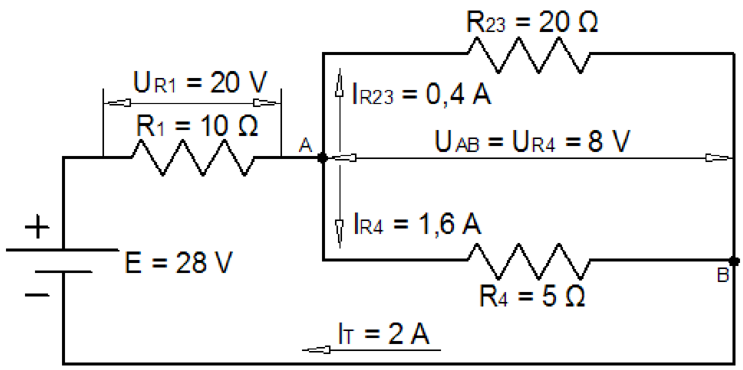
f.- Ahora estamos en condiciones de poder calcular I_{R23} e I_{R4}.

$$I_{R23} = \frac{U_{AB}}{R_{23}} = \frac{8\ V}{20\ \Omega} = 0{,}4\ A$$

$$I_{R4} = \frac{U_{AB}}{R_4} = \frac{8\ V}{5\ \Omega} = 1{,}6\ A$$

También se podría haber calculado una de las corrientes por la primera ley de Kirchoff, en lugar de la ley de Ohm, por ejemplo:

$$I_{R4} = I_T - I_{R23} = 2\ A - 0{,}4\ A = 1{,}6\ A$$



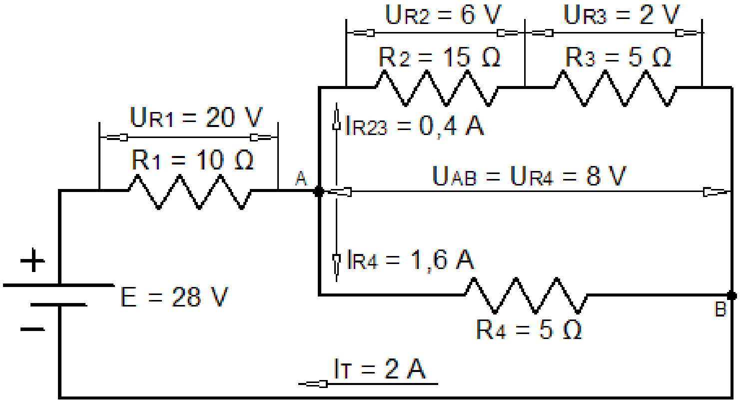
g.- Por último calculamos U_{R2} y U_{R3}.

$$U_{R2} = I_{R23} \,.\, R_2 = 0{,}4\ A \,.\, 15\ \Omega = 6\ V$$

$$U_{R3} = I_{R23} \,.\, R_3 = 0{,}4\ A \,.\, 5\ \Omega = 2\ V$$

También se podría haber calculado una de las tensiones por la segunda ley de Kirchoff, en lugar de la ley de Ohm, por ejemplo:

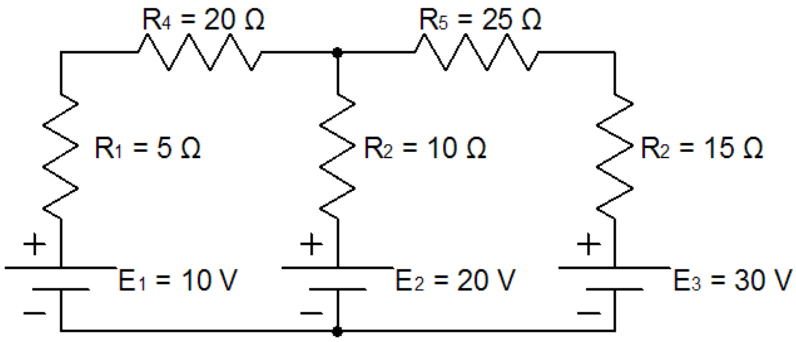
$$U_{R3} = U_{AB} - U_{R3} = 8\ V - 6\ V = 2\ V$$



Resolución de circuitos con más de una fuente de alimentación, comparando los distintos métodos vistos.

Ejercicio N°1:

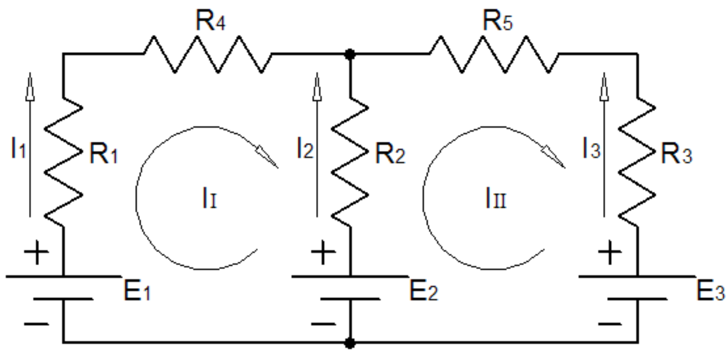
Se determinarán las corrientes de cada rama del siguiente circuito, por el método de Kirchoff, por el método de las mallas, por el teorema de superposición de efectos, por el método de las tensiones nodales y además se determinará el equivalente de Thevenin en los bornes AB.



Solución:

a.- Método de Kirchoff.

Como primera medida fijamos un sentido de circulación en cada malla (elegimos arbitrariamente sentido horario) y un sentido de corriente en cada rama, luego se verificará si el sentido elegido es correcto de acuerdo con el cálculo analítico.



En segundo térmico planteamos las ecuaciones del sistema, recordando que necesitamos n – 1 ecuaciones de nodos y las restantes serán ecuaciones de malla, cumpliendo con la cantidad de incógnitas del sistema, en este caso 2, dado que tenemos tres ramas.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ I_1 \,.\, R_1 + I_1 \,.\, R_4 - I_2 \,.\, R_2 = E_1 - E_2 \\ I_2 \,.\, R_2 - I_3 \,.\, R_5 - I_3 \,.\, R_3 = E_2 - E_3 \end{cases}$$

Agrupando:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ I_1 \,.\, (R_1 + R_4) - I_2 \,.\, R_2 = E_1 - E_2 \\ I_2 \,.\, R_2 - I_3 \,.\, (R_3 - R_5) = E_2 - E_3 \end{cases}$$

Completando y ordenando el sistema de ecuaciones y reemplazando numéricamente, tenemos:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ (5\,\Omega + 20\,\Omega) \,.\, I_1 - 10\,\Omega \,.\, I_2 + 0\ \ I_3 = 10\text{ V} - 20\text{ V} \\ 0\ \ I_1 + 10\,\Omega \,.\, I_2 - (25\,\Omega + 15\,\Omega) \,.\, I_3 = 20\text{ V} - 30\text{ V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ 25\,\Omega \,.\, I_1 - 10\,\Omega \,.\, I_2 + 0\ \ I_3 = -10\text{ V} \\ 0\ \ I_1 + 10\,\Omega \,.\, I_2 - 40\,\Omega \,.\, I_3 = -10\text{ V} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por determinantes, tenemos:
Determinante principal:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 25 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & -40 \end{vmatrix} = 400 + 250 + 1000 = 1650$$

Determinación de la corriente de rama I_1

$$I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -10 & -10 & 0 \\ -10 & 10 & -40 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 25 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & -40 \end{vmatrix}} = \frac{-100 - 100 - 400}{1650} = \frac{-600}{1650} = -0{,}363\text{ A}$$

Determinación de la corriente de rama I_2

$$I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 25 & -10 & 0 \\ 0 & -10 & -40 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 25 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & -40 \end{vmatrix}} = \frac{400 - 250}{1650} = \frac{150}{1650} = 0{,}091\text{ A}$$

Determinación de la corriente de rama I_3

$$I_3 = \frac{\Delta I_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 25 & -10 & -10 \\ 0 & 10 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 25 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & -40 \end{vmatrix}} = \frac{100+100+250}{1650} = \frac{450}{1650} = 0{,}273\ \mathrm{A}$$

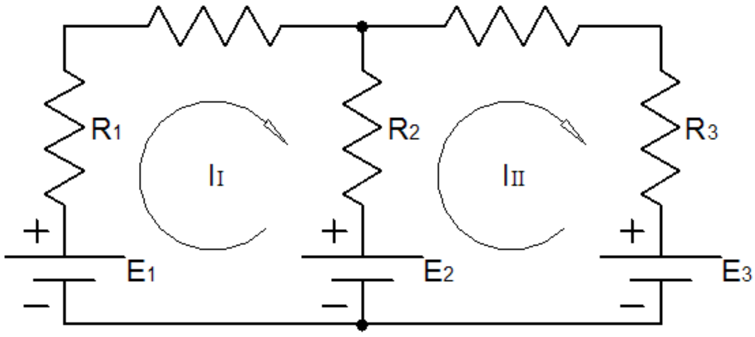
Las corrientes de rama tienen los siguientes valores:

I_1 = -0,363 A	**I_2 = 0,091 A**	**I_3 = 0,273 A**

Los resultados obtenidos son los valores de las corrientes de rama, el signo positivo nos indica que el sentido adoptado previamente es coincidente con el verdadero del circuito, mientras que el signo negativo nos indica que el sentido previamente adoptado es contrario al real del circuito. Estos resultados serán verificados posteriormente, cuando realicemos la resolución por los otros métodos de cálculo.

b.- Método de las corrientes de malla.

Como primera medida planteamos los sentidos arbitrarios de las corrientes ficticias de mallas.



En segundo lugar se plantean las ecuaciones de mallas, que serán tantas ecuaciones como incógnitas tengamos, en este caso serán dos ecuaciones dado que tenemos dos incógnitas I_I e I_{II}.

$$\begin{cases} I_I \,.(R_1 + R_4 + R_2) - I_{II}\,.R_2 = E_1 - E_2 \\ -I_I\,.R_2 + I_{II}\,.(R_2 + R_5 + R_3) = E_2 - E_3 \end{cases}$$

Completando y ordenando el sistema de ecuaciones y reemplazando numéricamente, tenemos:

$$\begin{cases} I_I\,.(5\,\Omega + 20\,\Omega + 10\,\Omega) - I_{II}\,.10\,\Omega = 10\ \mathrm{V} - 20\ \mathrm{V} \\ -I_I\,.10\,\Omega + I_{II}\,.(10\,\Omega + 25\,\Omega + 15\,\Omega) = 20\ \mathrm{V} - 30\ \mathrm{V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 35\,\Omega\, I_I - 10\,\Omega\, I_{II} = -10\ \mathrm{V} \\ -10\,\Omega\ I_I + 50\,\Omega\, I_{II} = -10\ \mathrm{V} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por determinantes, tenemos:
Determinante principal:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 35 & -10 \\ -10 & 50 \end{vmatrix} = 1750 - 100 = 1650$$

Determinación de la corriente de la malla I_I

$$I_I = \frac{\Delta I_I}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -10 \\ -10 & 50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 35 & -10 \\ -10 & 50 \end{vmatrix}} = \frac{-500 - 100}{1650} = \frac{-600}{1650} = -0{,}363\ \text{A}$$

Determinación de la corriente de la malla I_{II}

$$I_{II} = \frac{\Delta I_{II}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 35 & -10 \\ -10 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 35 & -10 \\ -10 & 50 \end{vmatrix}} = \frac{-350 - 100}{1650} = \frac{-450}{1650} = -0{,}273\ \text{A}$$

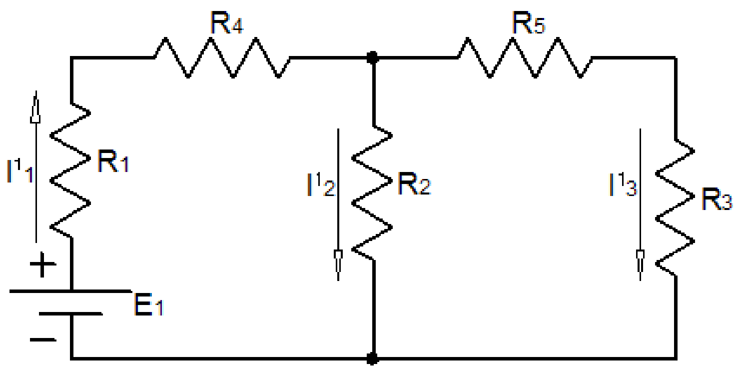
Las corrientes de malla I_I e I_{II} determinadas corresponden a las corrientes de rama I_1 e I_3 respectivamente, debido a que son las ramas independientes, y la corriente de rama I_2 se determina por la diferencia de I_I e I_{II}.

$I_I = - I_1 = - 0{,}363$ A	**$I_2 = I_{II} - I_I = - 0{,}272$ A + 0,363 A = 0,091 A**	**$I_{II} = - I_3 = - 0{,}272$ A**

Como se ve los valores de las corrientes de rama calculados por el método de las mallas coinciden con los obtenidos por el método de Kirchoff.

c.- Método por teorema de superposición de efectos.

Como primer paso, recordando el teorema de superposición de efectos, se dejará únicamente actuando una sola de las fuentes, en nuestro caso E_1, y se pasivarán las restantes (E_2 y E_3), o sea, como son fuentes de tensión, se reemplazarán por un cortocircuito y la resistencia interna de la fuente, si la tuviera, conectada en serie. Tenidas en cuenta, estas consideraciones el circuito quedará de la siguiente manera:
.



El cálculo se determina utilizando la ley de Ohm y las leyes de Kirchoff, tal cual como cualquier circuito con una sola fuente de alimentación.

$$R_{T1} = R_1 + R_4 + \frac{R_2 \,.\, (R_5 + R_3)}{R_2 + R_5 + R_3} = 5\,\Omega + 20\,\Omega + \frac{10\,\Omega \,.\, (25\,\Omega + 15\,\Omega)}{10\,\Omega + 25\,\Omega + 15\,\Omega} = 33\,\Omega$$

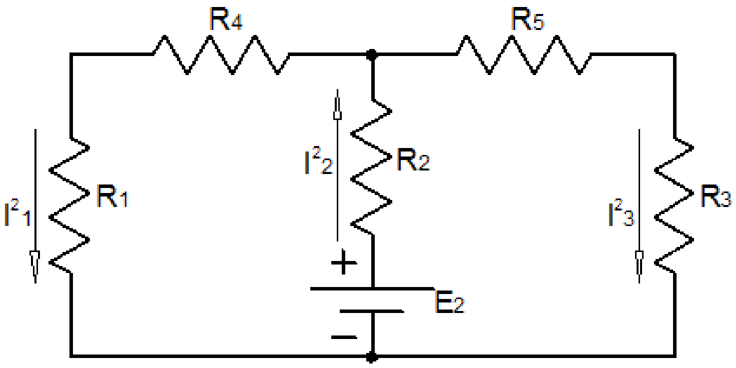
$$I_1^1 = \frac{E_1}{R_{T1}} = \frac{10\ \text{V}}{33\,\Omega} = 0{,}303\ \text{A}$$

$$U_P^1 = E_1 - I_1^1 \,.\, (R_1 + R_4) = 10\ \text{V} - 0{,}303\ \text{A}\,(5\,\Omega + 20\,\Omega) = 2{,}424\ \text{V}$$

$$I_2^1 = \frac{U_P^1}{R_2} = \frac{2{,}424\ \text{V}}{10\,\Omega} = 0{,}242\ \text{A}$$

$$I_3^1 = \frac{U_P^1}{R_3 + R_5} = \frac{2{,}424\ \text{V}}{15\,\Omega + 25\,\Omega} = \frac{2{,}424\ \text{V}}{40\,\Omega} = 0{,}0606\ \text{A}$$

Actuando solamente E_2 y pasivando las restantes fuentes.



$$R_{T2} = R_2 + \frac{(R_1 + R_4).(R_5 + R_3)}{R_1 + R_4 + R_3 + R_5} = 10\,\Omega + \frac{(5\,\Omega + 20\,\Omega).(15\,\Omega + 25\,\Omega)}{5\,\Omega + 20\,\Omega + 15\,\Omega + 25\,\Omega} = 25{,}38\,\Omega$$

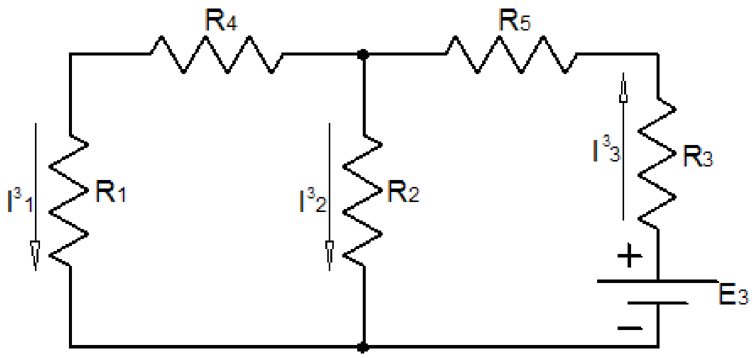
$$I_2^2 = \frac{E_2}{R_{T2}} = \frac{20\text{ V}}{25{,}38\,\Omega} = 0{,}788\text{ A}$$

$$U_P^2 = E_2 - I_2^2 . R_2 = 20\text{ V} - 0{,}788\text{ A} . 10\,\Omega = 12{,}12\text{ V}$$

$$I_1^2 = \frac{U_P^2}{(R_1 + R_4)} = \frac{12{,}12\text{ V}}{(5\,\Omega + 20\,\Omega)} = \frac{12{,}12\text{ V}}{25\,\Omega} = 0{,}485\text{ A}$$

$$I_3^2 = \frac{U_P^2}{R_3 + R_5} = \frac{12{,}12\text{ V}}{(15\,\Omega + 25\,\Omega)} = \frac{12{,}12\text{ V}}{40\,\Omega} = 0{,}303\text{ A}$$

Actuando solamente E_3 y pasivando las restantes fuentes.



$$R_{T3} = R_3 + R_5 + \frac{(R_1 + R_4).R_2}{R_1 + R_2 + R_4} = 15\,\Omega + 25\,\Omega + \frac{(5\,\Omega + 20\,\Omega).10\,\Omega}{5\,\Omega + 10\,\Omega + 20\,\Omega} = 47{,}14\,\Omega$$

$$I_3^3 = \frac{E_3}{R_{T3}} = \frac{30\text{ V}}{47{,}14\,\Omega} = 0{,}636\text{ A}$$

$$U_P^3 = E_3 - I_3^3 . (R_3 + R_5) = 30\text{ V} - 0{,}636\text{ A}\,(15\,\Omega + 25\,\Omega) = 4{,}56\text{ V}$$

$$I_1^3 = \frac{U_P^3}{(R_1 + R_4)} = \frac{4{,}56\text{ V}}{(5\,\Omega + 20\,\Omega)} = \frac{4{,}56\text{ V}}{25\,\Omega} = 0{,}182\text{ A}$$

$$I_2^3 = \frac{U_P^3}{R_2} = \frac{4{,}56\text{ V}}{10\,\Omega} = 0{,}456\text{ A}$$

Habiendo hallado todas las corrientes para cada una de las fuentes actuando individualmente, solamente resta sumar las correspondientes a cada estado respetando los sentidos adoptados en cada uno de ellos para poder llegar al resultado correcto.

$$I_1 = I_1^1 - I_1^2 - I_1^3 = 0{,}303\ A - 0{,}182\ A - 0{,}182\ A = -0{,}364\ A$$

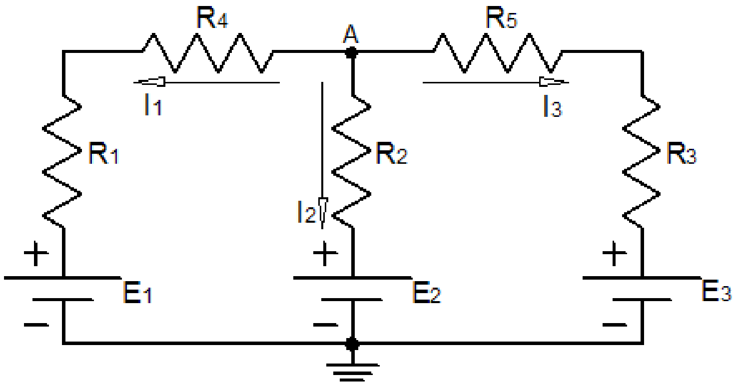
$$I_2 = -I_2^1 + I_2^2 - I_2^3 = -0{,}242\ A + 0{,}788\ A - 0{,}456\ A = 0{,}09\ A$$

$$I_3 = -I_3^1 - I_3^2 + I_3^3 = -0{,}06\ A - 0{,}303\ A + 0{,}636\ A = 0{,}273\ A$$

I_1 = -0,364 A	**I_2 = 0,09 A**	**I_3 = 0,273 A**

Como se ve, también se verifican los resultados por aplicación del teorema de superposición de efectos.

d.- Método de las Tensiones Nodales.



El primer paso es elegir el nodo de referencia y luego plantear las ecuaciones necesarias (número de nodos -1). Para el circuito en cuestión es necesario plantear una sola ecuación a saber.

$$U_A \cdot \left(\frac{1}{R_1 + R_4} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_5} \right) = \frac{E_1}{R_1 + R_4} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3 + R_5}$$

$$U_A \cdot \left(\frac{1}{5\,\Omega + 20\,\Omega} + \frac{1}{10\,\Omega} + \frac{1}{15\,\Omega + 25\,\Omega} \right) = \frac{10\ V}{5\,\Omega + 20\,\Omega} + \frac{20\ V}{10\,\Omega} + \frac{30\ V}{15\,\Omega + 25\,\Omega}$$

$$U_A \cdot \left(\frac{1}{25\,\Omega} + \frac{1}{10\,\Omega} + \frac{1}{40\,\Omega} \right) = \frac{10\ V}{25\,\Omega} + \frac{20\ V}{10\,\Omega} + \frac{30\ V}{40\,\Omega}$$

$$U_A\ (0{,}04\ S + 0{,}1\ S + 0{,}025\ S = 0{,}4\ A + 2\ A + 0{,}75\ A$$

$$U_A\ .\ 0{,}165\ S = 3{,}15\ A$$

$$U_A = \frac{3{,}15\ A}{0{,}165\ S} = 19{,}09\ V$$

Teniendo como dato el potencial del nodo A, a continuación planteamos las corrientes de rama, teniendo en cuenta los sentidos salientes de I_1, I_2, e I_3:

Para I_1:

$$I_1 = \frac{U_A - E_1}{R_1 + R_4} = \frac{19{,}09\ V - 10\ V}{5\,\Omega + 20\,\Omega} = 0{,}363\ A$$

Para I_2:

$$I_2 = \frac{U_A - E_2}{R_2} = \frac{19{,}09\ V - 20\ V}{10\,\Omega} = -0{,}09\ A$$

Para I_3:

$$I_3 = \frac{U_A - E_3}{R_3 + R_5} = \frac{19{,}09\ V - 30\ V}{15\,\Omega + 25\,\Omega} = -0{,}273\ A$$

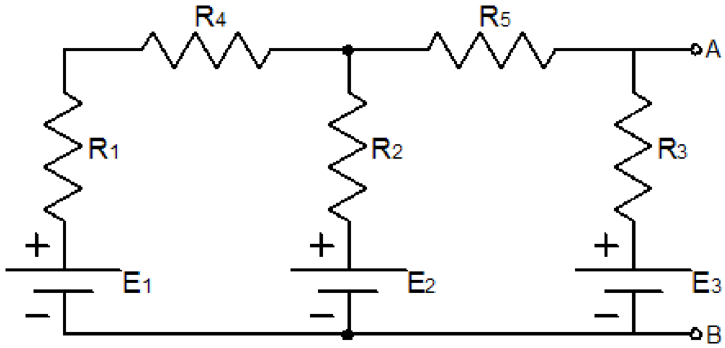
De acuerdo a los sentidos obtenidos, los verdaderos sentidos serán:

I_1 = -0,363 A	**I_2 = 0,09 A**	**I_3 = 0,273 A**

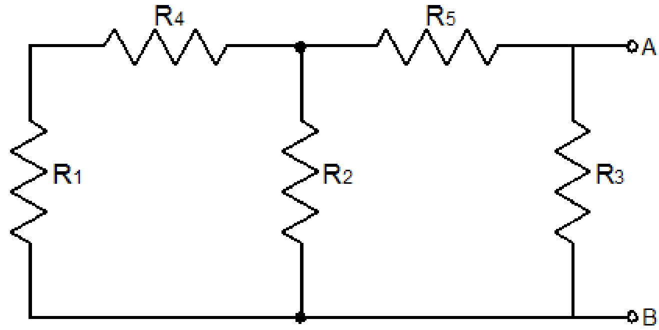
Donde I_2 e I_3 son entrantes al nodo A e I_1 saliente. Además corroboramos los valores obtenidos por este método de resolución con los anteriores.

e.- Determinación del equivalente de Thevenin.

Determinación del equivalente de Thevenin en los bornes AB.



Como primer paso debemos hallar la resistencia de Thevenin R_{Th}, viendo al circuito desde los bornes AB, para ello pasivamos el circuito reemplazando las fuentes por sus resistencias internas (en nuestro caso simplemente cortocircuitamos a las mismas) si las tuviere.



$$R_{Th} = \frac{\left(\frac{R_2 \cdot (R_1 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_4} + R_5\right) \cdot R_3}{\frac{R_2 \cdot (R_1 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_4} + R_3 + R_5} = \frac{\left(\frac{10\,\Omega \cdot (5\,\Omega + 20\,\Omega)}{5\,\Omega + 10\,\Omega + 20\,\Omega} + 25\,\Omega\right) \cdot 15\,\Omega}{\frac{10\,\Omega \cdot (5\,\Omega + 20\,\Omega)}{5\,\Omega + 10\,\Omega + 20\,\Omega} + 15\,\Omega + 25\,\Omega} =$$

$$R_{Th} = \frac{(7{,}142\,\Omega + 25\,\Omega) \cdot 15\,\Omega}{7{,}142\,\Omega + 15\,\Omega + 25\,\Omega} = \frac{482{,}142\,\Omega^2}{47{,}142\,\Omega} = 10{,}227\,\Omega$$

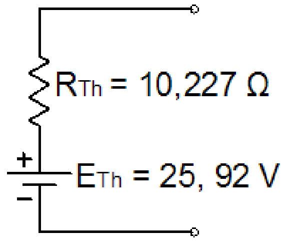
Una vez determinada la resistencia de Thevenin R_{Th}, tenemos que determinar la tensión de Thevenin E_{Th}, para ello es necesario determinar el valor de la corriente que circula por R_3, dado que la tensión de Thevenin será:

$$E_{Th} = E_3 - U_{R3} = E_3 - I_{R3} \cdot R_3$$

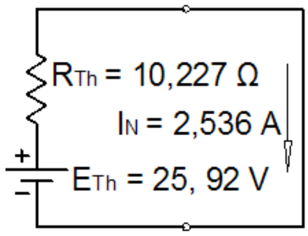
Para calcular dicho valor de corriente se puede recurrir a cualquiera de los métodos antes vistos, o sea: por Kirchoff, por mallas, por superposición o por nodos. En nuestro caso la corriente de rama ya fue resuelta por todos los métodos, por lo tanto conocemos el valor de dicha corriente, y solo resta reemplazar en la ecuación anterior.

$$E_{Th} = 30\ V - 0{,}272\ A \cdot 15\ \Omega = 25{,}92\ V$$

Por tanto el equivalente de Thevenin es:



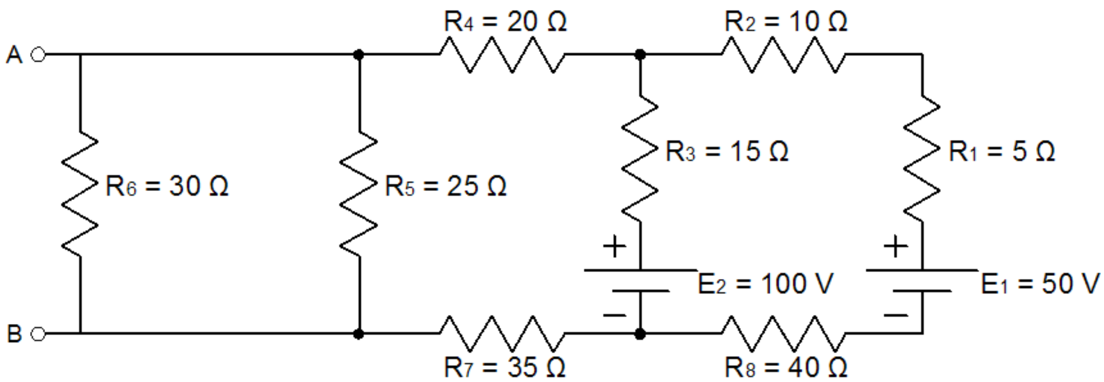
Si quisiéramos determinar la corriente de Norton, sólo tendríamos que cortocircuitar el equivalente de Thevenin.



Por lo tanto I_N será:

$$I_N = \frac{E_{Th}}{R_{Th}} = \frac{25{,}92\ V}{10{,}227\ \Omega} = 2{,}536\ A$$

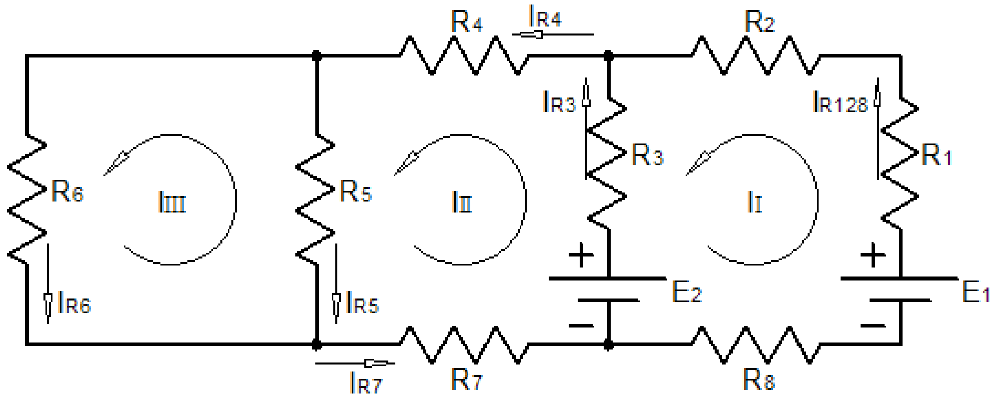
Ejercicio N°2:
Se determinarán las corrientes de cada rama del siguiente circuito, por el método de las mallas, por el teorema de superposición de efectos, por el método de las tensiones nodales y además se determinará el equivalente de Thevenin en los bornes AB.



A partir de este ejercicio no plantearemos la resolución por el método de Kirchoff, debido a que como vimos en el ejercicio anterior, es el método más largo de resolución, debido a que es el que más ecuaciones requiere, complicando los cálculos analíticos innecesariamente.

a.- Método de las corrientes de malla.

Como primera medida planteamos los sentidos arbitrarios de las corrientes ficticias de mallas.



En segundo término planteamos las ecuaciones de malla, que serán tantas como corrientes ficticias de malla tengamos, en este caso tres ecuaciones, dado que tenemos I_I, I_{II}, e I_{III}.

$$\begin{cases} I_I.(R_1+R_2+R_3+R_8)-I_{II}.R_3+0\,I_{III}=E_1-E_2 \\ -I_I.R_3+I_{II}.(R_3+R_4+R_5+R_7)-I_{III}.R_5=E_2 \\ 0\,I_I-I_{II}.R_5+I_{III}.(R_5+R_6)=0 \end{cases}$$

Reemplazando numéricamente, tenemos:

$$\begin{cases} I_I.(5\,\Omega+10\,\Omega+15\,\Omega+40\,\Omega)-I_{II}.15\,\Omega+0\,I_{III}=50\text{ V}-100\text{ V} \\ -I_I.15\,\Omega+I_{II}.(15\,\Omega+20\,\Omega+25\,\Omega+35\,\Omega)-I_{III}.25\,\Omega=100\text{ V} \\ 0\,I_I-I_{II}.25\,\Omega+I_{III}.(25\,\Omega+30\,\Omega)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 70\,I_I-15\,I_{II}+0\,I_{III}=-50 \\ -15\,I_I+95\,I_{II}-25\,I_{III}=100\text{ V} \\ 0\,I_I-25\,I_{II}+55\,I_{III}=0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por determinantes, tenemos:
Determinante principal:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 70 & -15 & 0 \\ -15 & 95 & -25 \\ 0 & -25 & 55 \end{vmatrix}=365750-43750-12375=309625$$

Determinación de la corriente de la malla I_I

$$I_I=\frac{\Delta I_I}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} -50 & -15 & 0 \\ 100 & 95 & -25 \\ 0 & -25 & 55 \end{vmatrix}}{309625}=\frac{-261250+31250+82500}{309625}=\frac{-147500}{309625}=-0{,}476\text{ A}$$

Determinación de la corriente de la malla I_{II}

$$I_{II}=\frac{\Delta I_{II}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 70 & -50 & 0 \\ -15 & 100 & -25 \\ 0 & 0 & 55 \end{vmatrix}}{309625}=\frac{385000-41250}{309625}=\frac{343750}{309625}=1{,}11\text{ A}$$

Determinación de la corriente de la malla I_{III}

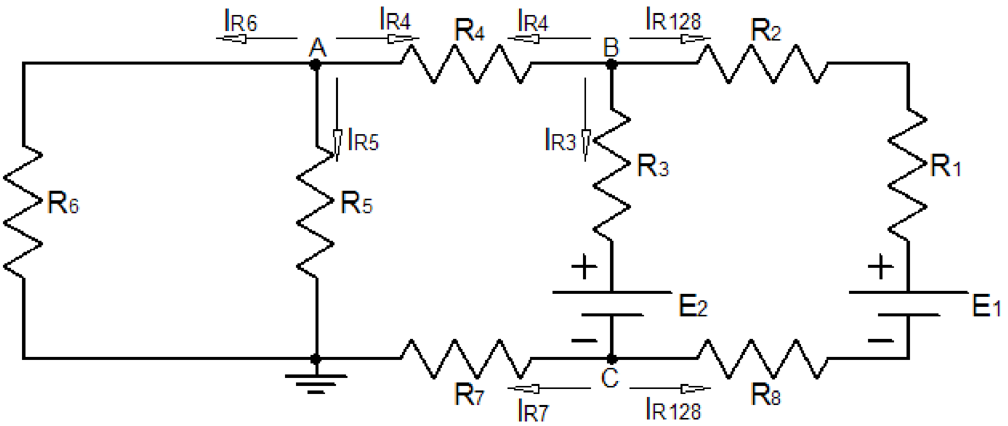
$$I_{III}=\frac{\Delta I_{III}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 70 & -15 & -50 \\ -15 & 95 & 100 \\ 0 & -25 & 0 \end{vmatrix}}{309625}=\frac{-18750+175000}{309625}=\frac{156250}{309625}=0{,}504\text{ A}$$

Conocidas las corrientes ficticias de malla I_I, I_{II} e I_{III}, podemos determinar las corrientes de rama I_1, I_2, I_3 e I_4, sumando algebraicamente y respetando los signos.

$I_{R128} = I_I = -0{,}476$ A
$I_{R3} = I_{II} - I_I = 1{,}11$ A + 0,476 A = 1,586 A
$I_{R4} = I_{R7} = I_{II} = 1{,}11$ A
$I_{R5} = I_{II} - I_{III} = 1{,}11$ A - 0,504 A = 0,605 A
$I_{R6} = I_{III} = 0{,}504$ A

I_{R128} = -0,476 A	**I_{R3} =1,586 A**	**I_{R4} = -I_{R7} = 1,11 A**	**I_{R5} = 0,605 A**	**I_{R6} = 0,504 A**

b.- Método de las Tensiones Nodales.



El primer paso es elegir el nodo de referencia, para luego plantear las ecuaciones, que en el presente circuito serán tres ecuaciones (números de nodos – 1)

$$\begin{cases} U_A\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}\right) - \frac{U_B}{R_4} + 0\,U_C = 0 \\ -\frac{U_A}{R_4} + U_B\left(\frac{1}{R_{128}}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right) - U_C\left(\frac{1}{R_{128}}+\frac{1}{R_3}\right) = \frac{E_1}{R_{128}}+\frac{E_2}{R_3} \\ +0\,U_A - U_B\left(\frac{1}{R_{128}}+\frac{1}{R_3}\right) + U_C\left(\frac{1}{R_{128}}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_7}\right) = -\frac{E_1}{R_{128}} - \frac{E_2}{R_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_A\left(\frac{1}{20\,\Omega}+\frac{1}{25\,\Omega}+\frac{1}{30\,\Omega}\right) - \frac{U_B}{20\,\Omega} + 0\,U_C = 0 \\ -\frac{U_A}{20\,\Omega} + U_B\left(\frac{1}{55\,\Omega}+\frac{1}{15\,\Omega}+\frac{1}{20\,\Omega}\right) - U_C\left(\frac{1}{55\,\Omega}+\frac{1}{15\,\Omega}\right) = \frac{50\text{ V}}{55\,\Omega}+\frac{100\text{ V}}{15\,\Omega} \\ +0\,U_A - U_B\left(\frac{1}{55\,\Omega}+\frac{1}{15\,\Omega}\right) + U_C\left(\frac{1}{55\,\Omega}+\frac{1}{15\,\Omega}+\frac{1}{35\,\Omega}\right) = -\frac{50\text{ V}}{55\,\Omega} - \frac{100\text{ V}}{15\,\Omega} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (0{,}05\text{ S}+0{,}04\text{ S}+0{,}033\text{ S})U_A - 0{,}05\text{ S}\,U_B + 0\,U_C = 0 \\ -0{,}05\text{ S}\,U_A + (0{,}0182\text{ S}+0{,}0666\text{ S}+0{,}05\text{ S})U_B - (0{,}0182\text{ S}+0{,}0666\text{ S})U_C = 7{,}576\text{ A} \\ +0\,U_A - (0{,}0182\text{ S}+0{,}0667\text{ S})U_B + (0{,}0182\text{ S}+0{,}0667\text{ S}+0{,}0286)U_C = -7{,}576\text{ A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}123\,U_A - 0{,}05\text{ S}\,U_B + 0\,U_C = 0 \\ -0{,}05\text{ S}\,U_A + 0{,}1349\,U_B - 0{,}0849\,U_C = 7{,}576\text{ A} \\ +0\,U_A - 0{,}0849\,U_B + 0{,}1135\,U_C = -7{,}576\text{ A} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por determinantes, tenemos:
Determinante principal:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0{,}123 & -0{,}05 & 0 \\ -0{,}05 & 0{,}1349 & -0{,}0849 \\ 0 & -0{,}0849 & 0{,}1135 \end{vmatrix} = 0{,}0018848 - 0{,}00088655 - 0{,}0002835 = 0{,}00071475$$

Determinación de la corriente de la tensión U_A

$$U_A = \frac{\Delta U_A}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -0{,}05 & 0 \\ 7{,}57 & 0{,}1349 & -0{,}0849 \\ -7{,}57 & -0{,}0849 & 0{,}1135 \end{vmatrix}}{0{,}00071475} = \frac{-0{,}032134 + 0{,}042959}{0{,}00071475} = \frac{0{,}010825}{0{,}00071475} = 15{,}145\ \text{V}$$

Determinación de la corriente de la tensión U_B

$$U_B = \frac{\Delta U_B}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}123 & 0 & 0 \\ -0{,}05 & 7{,}57 & -0{,}0849 \\ 0 & -7{,}57 & 0{,}1135 \end{vmatrix}}{0{,}00071475} = \frac{0{,}105681 - 0{,}079051}{0{,}00071475} = \frac{0{,}02663}{0{,}00071475} = 37{,}257\ \text{V}$$

Determinación de la corriente de la tensión U_C

$$U_C = \frac{\Delta U_C}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}123 & -0{,}05 & 0 \\ -0{,}05 & 0{,}1349 & 7{,}57 \\ 0 & -0{,}0849 & -7{,}57 \end{vmatrix}}{0{,}00071475} = \frac{-0{,}125606 + 0{,}018925 + 0{,}079051}{0{,}00071475} =$$

$$U_C = \frac{\Delta U_C}{\Delta} = \frac{0{,}02763}{0{,}00071475} = -38{,}657\ \text{V}$$

Teniendo las tres tensiones de nodo, estamos en condiciones de determinar las corrientes de rama, reemplazando en las ecuaciones correspondientes.

Para la rama de I_{R128} se tiene:

$$I_{R128} = \frac{U_B - E_1 - U_C}{R_1 + R_2 + R_8} = \frac{37{,}257\ \text{V} - 50\ \text{V} + 38{,}657\ \text{V}}{5\,\Omega + 10\,\Omega + 40\,\Omega} = 0{,}471\ \text{A}$$

Para la rama de I_{R3} se tiene:

$$I_{R3} = \frac{U_B - E_2 - U_C}{R_3} = \frac{37{,}257\ \text{V} - 100\ \text{V} + 38{,}657\ \text{V}}{15\,\Omega} = -1{,}605\ \text{A}$$

Para la rama de I_{R4} se tiene:

$$I_{R4} = \frac{U_B - U_A}{R_4} = \frac{37{,}257\ \text{V} - 15{,}147\ \text{V}}{20\,\Omega} = 1{,}105\ \text{A}$$

Para la rama de I_{R5} se tiene:

$$I_{R5} = \frac{U_A}{R_5} = \frac{15{,}147\ \text{V}}{25\,\Omega} = 0{,}606\ \text{A}$$

Para la rama de I_{R6} se tiene:

$$I_{R6} = \frac{U_A}{R_6} = \frac{15{,}147\ \text{V}}{30\,\Omega} = 0{,}505\ \text{A}$$

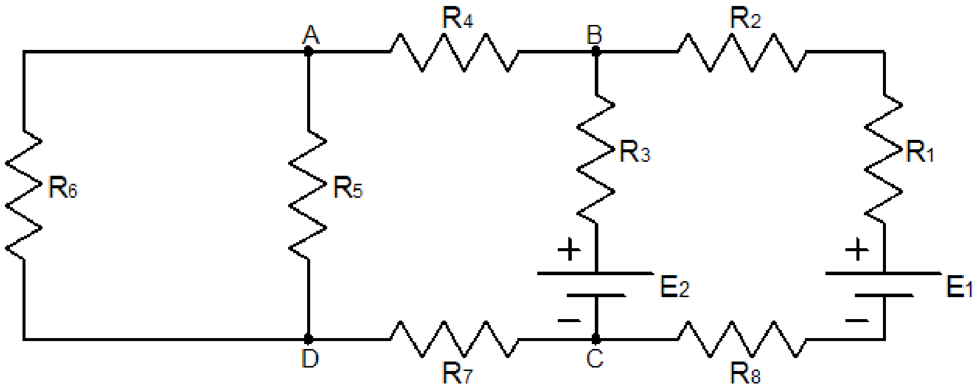
Para la rama de I_{R7} se tiene:

$$I_{R7} = \frac{U_C}{R_7} = \frac{-38{,}657\ \text{V}}{35\,\Omega} = -1{,}105\ \text{A}$$

I_{R128} = 0,471 A	**I_{R3} =1,605 A**	**I_{R4} = -I_{R7} = 1,105 A**	**I_{R5} = 0,606 A**	**I_{R6} = 0,505 A**

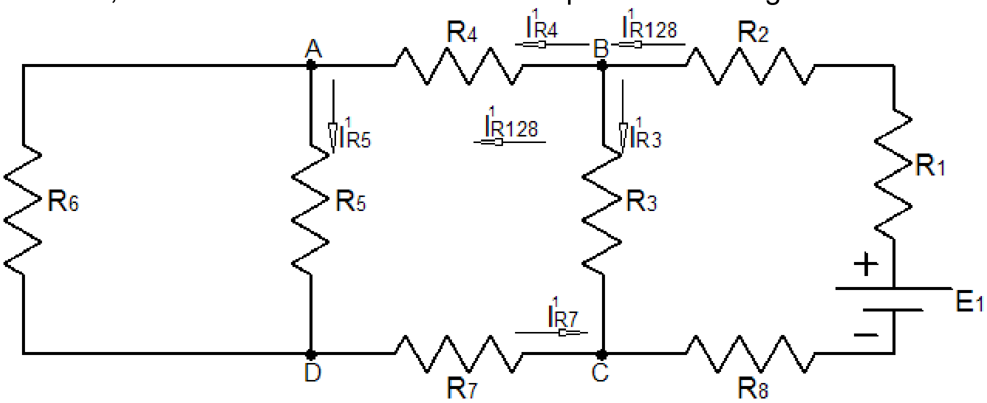
Como se ve, los valores prácticamente coinciden con los determinados por el método de las mallas, las pequeñas diferencias se deben a que en el método de los nodos se trabaja con las conductancias y el redondeo produce esa situación.

c.- Método por teorema de superposición de efectos.



Como primer paso, recordando el teorema de superposición de efectos, se dejará únicamente actuando una sola de las fuentes, en nuestro caso E_1, y se pasivará la restante, o sea, como son fuentes de tensión, se reemplazarán por un cortocircuito y la resistencia interna de la fuente, si la tuviera, conectada en serie.

Tenidas en cuenta, estas consideraciones el circuito quedará de la siguiente manera:



A continuación calcularemos la resistencia total R_T^1 :

$$R_T^1 = R_1 + R_2 + \frac{R_3 . \left(R_4 + \frac{R_5 . R_6}{R_5 + R_6} + R_7 \right)}{R_3 + R_4 + \frac{R_5 . R_6}{R_5 + R_6} + R_7} + R_8 =$$

$$R_T^1 = 5\,\Omega + 10\,\Omega + \frac{15\,\Omega . \left(20\,\Omega + \frac{25\,\Omega . 30\,\Omega}{25\,\Omega + 30\,\Omega} + 35\,\Omega \right)}{15\,\Omega + 20\,\Omega + \frac{25\,\Omega . 30\,\Omega}{25\,\Omega + 30\,\Omega} + 35\,\Omega} + 40\,\Omega = 67{,}31\,\Omega$$

$$I_T^1 = I_{R128}^1 = \frac{E_1}{R_T^1} = \frac{50\text{ V}}{67{,}31\,\Omega} = 0{,}743\text{ A}$$

$$U_{R128}^1 = I_T^1 . R_{128} = 0{,}743\text{ A} . 55\,\Omega = 40{,}865\text{ V}$$

$$U_{BC}^1 = E_1 - U_{R128}^1 = 50\text{ V} - 40{,}865\text{ V} = 9{,}135\text{ V}$$

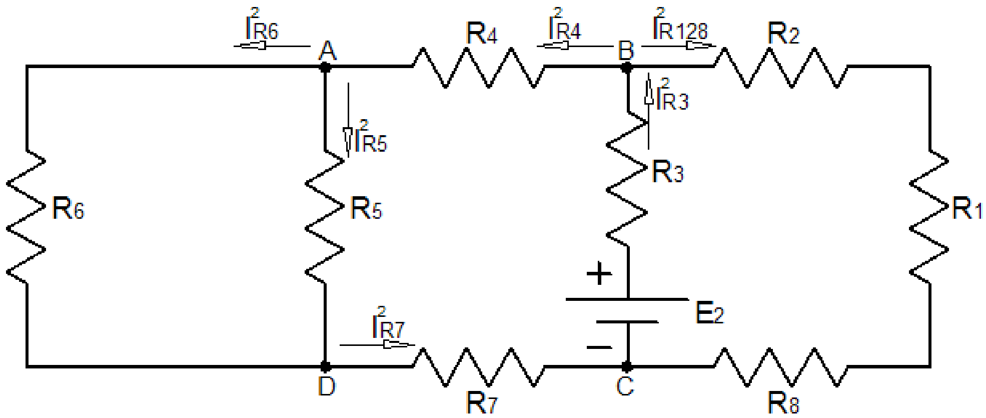
$$I_{R3}^1 = \frac{U_{BC}^1}{R_3} = \frac{9{,}135\text{ V}}{15\,\Omega} = 0{,}609\text{ A}$$

$$I_{R4}^1 = I_{R128}^1 - I_{R3}^1 = 0{,}743\text{ A} - 0{,}609\text{ A} = 0{,}134\text{ A}$$

$$U_{AD}^{1} = I_{R4}^{1} \cdot \frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6} = 0{,}134\ A \cdot \frac{25\,\Omega \cdot 30\,\Omega}{25\,\Omega + 30\,\Omega} = 0{,}134\ A \cdot 13{,}636\,\Omega = 1{,}826\ V$$

$$I_{R5}^{1} = \frac{U_{AD}^{1}}{R_5} = \frac{1{,}826\ V}{25\,\Omega} = 0{,}073\ A$$

$$I_{R6}^{1} = \frac{U_{AD}^{1}}{R_6} = \frac{1{,}826\ V}{30\,\Omega} = 0{,}061\ A$$



Pasivando E_1 y activando E_2, tendremos los siguientes cálculos:

$$R_T^2 = R_3 + \frac{(R_1 + R_2 + R_8) \cdot \left(R_4 + \frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6} + R_7 \right)}{R_1 + R_2 + R_8 + R_4 + \frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6} + R_7} =$$

$$R_T^2 = 15\,\Omega + \frac{(5\,\Omega + 10\,\Omega + 40\,\Omega) \cdot \left(20\,\Omega + \frac{25\,\Omega \cdot 30\,\Omega}{25\,\Omega + 30\,\Omega} + 35\,\Omega \right)}{5\,\Omega + 10\,\Omega + 40\,\Omega + 20\,\Omega + \frac{25\,\Omega \cdot 30\,\Omega}{25\,\Omega + 30\,\Omega} + 35\,\Omega} = 45{,}53\,\Omega$$

$$I_T^2 = I_{R3}^2 = \frac{E_2}{R_T^2} = \frac{100\ V}{45{,}53\,\Omega} = 2{,}196\ A$$

$$U_{R3}^2 = I_T^2 \cdot R_3 = 2{,}196\ A \cdot 15\,\Omega = 32{,}94\ V$$

$$U_{BC}^2 = E_2 - U_{R3}^2 = 100\ V - 32{,}94\ V = 67{,}06\ V$$

$$I_{R128}^2 = \frac{U_{BC}^2}{R_{128}} = \frac{67{,}06\ V}{55\,\Omega} = 1{,}22\ A$$

$$I_{R4}^2 = I_{R3}^2 - I_{R128}^2 = 2{,}196\ A - 1{,}22\ A = 0{,}976A$$

$$U_{AD}^2 = I_{R4}^2 \cdot \frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6} = 0{,}976\ A \cdot \frac{25\,\Omega \cdot 30\,\Omega}{25\,\Omega + 30\,\Omega} = 0{,}976\ A \cdot 13{,}636\,\Omega = 13{,}3\ V$$

$$I_{R5}^2 = \frac{U_{AD}^2}{R_5} = \frac{13{,}3\ V}{25\,\Omega} = 0{,}532\ A$$

$$I_{R6}^2 = \frac{U_{AD}^2}{R_6} = \frac{13{,}3\ V}{30\,\Omega} = 0{,}443\ A$$

Sumando algebraicamente las corrientes según los sentidos adoptados en cada estado, llegaremos a los valores finales de las corrientes de rama.

$$I_{R128} = I^1_{R128} - I^2_{R128} = 0{,}743\ A - 1{,}22\ A = -0{,}477\ A$$

$$I_{R3} = I^1_{R3} - I^2_{R3} = -0{,}609\ A + 2{,}196\ A = 1{,}587\ A$$

$$I_{R4} = I^1_{R4} + I^2_{R4} = 0{,}134\ A + 0{,}976\ A = 1{,}11\ A$$

$$I_{R5} = I^1_{R5} + I^2_{R5} = 0{,}073\ A + 0{,}532\ A = 0{,}605\ A$$

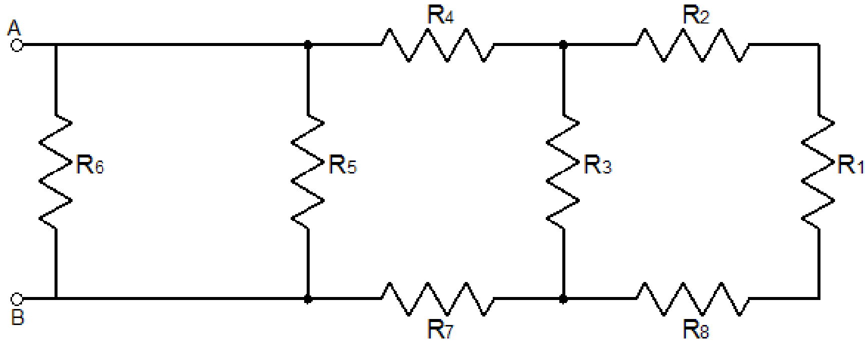
$$I_{R6} = I^1_{R6} + I^2_{R6} = 0{,}061\ A + 0{,}443\ A = 0{,}504\ A$$

$$I_{R7} = -I_{R4} = -1{,}11\ A$$

I_{R128} = 0,477 A	**I_{R3} =1,587 A**	**I_{R4} = -I_{R7} = 1,11 A**	**I_{R5} = 0,605 A**	**I_{R6} = 0,504 A**

Como se ve los valores hallados por el teorema de superposición coinciden con los hallados por lo métodos de las mallas y de los nodos.

d.- Determinación del equivalente de Thevenin.

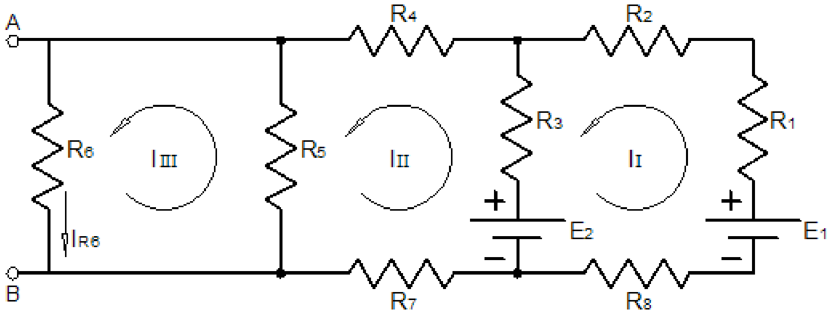


Como primer paso debemos hallar la resistencia de Thevenin R_{Th}, viendo al circuito desde los bornes AB, para ello pasivamos el circuito reemplazando las fuentes por sus resistencias internas (en nuestro caso simplemente cortocircuitamos a las mismas) si las tuviere.

$$R_{Th} = \frac{\left(\dfrac{\left(R_4 + R_7 + \left(\dfrac{(R_1 + R_2 + R_8).R_3}{R_1 + R_2 + R_8 + R_3}\right)\right).R_5}{\left(R_4 + R_7 + \left(\dfrac{(R_1 + R_2 + R_8).R_3}{R_1 + R_2 + R_8 + R_3}\right)\right) + R_5}\right).R_6}{\left(\dfrac{\left(R_4 + R_7 + \left(\dfrac{(R_1 + R_2 + R_8).R_3}{R_1 + R_2 + R_8 + R_3}\right)\right).R_5}{\left(R_4 + R_7 + \left(\dfrac{(R_1 + R_2 + R_8).R_3}{R_1 + R_2 + R_8 + R_3}\right)\right) + R_5}\right) + R_6} =$$

$$R_{Th} = \frac{\left(\dfrac{\left(20\,\Omega + 35\,\Omega + \left(\dfrac{(5\,\Omega + 10\,\Omega + 40\,\Omega).15\,\Omega}{5\,\Omega + 10\,\Omega + 40\,\Omega + 15\,\Omega}\right)\right).25\,\Omega}{\left(20\,\Omega + 35\,\Omega + \left(\dfrac{(5\,\Omega + 10\,\Omega + 40\,\Omega).15\,\Omega}{5\,\Omega + 10\,\Omega + 40\,\Omega + 15\,\Omega}\right)\right) + 25\,\Omega}\right).30\,\Omega}{\left(\dfrac{\left(20\,\Omega + 35\,\Omega + \left(\dfrac{(5\,\Omega + 10\,\Omega + 40\,\Omega).15\,\Omega}{5\,\Omega + 10\,\Omega + 40\,\Omega + 15\,\Omega}\right)\right).25\,\Omega}{\left(20\,\Omega + 35\,\Omega + \left(\dfrac{(5\,\Omega + 10\,\Omega + 40\,\Omega).15\,\Omega}{5\,\Omega + 10\,\Omega + 40\,\Omega + 15\,\Omega}\right)\right) + 25\,\Omega}\right) + 30\,\Omega} = 11{,}33\,\Omega$$

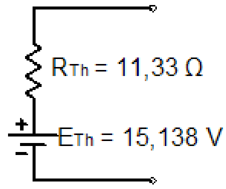
Para determinar E_{Th}, se necesita determinar el valor de la corriente que circula por R_6, dado que el producto de dicha corriente por R_6 es precisamente el valor de la tensión de Thevenin E_{Th}, ya que es la misma caída de potencial que aparece en los bornes AB. Para determinar dicha corriente es necesario plantear cualquiera de los métodos conocidos. Adoptaremos el método de las mallas, por ser el de más sencilla aplicación para esta topología circuital.



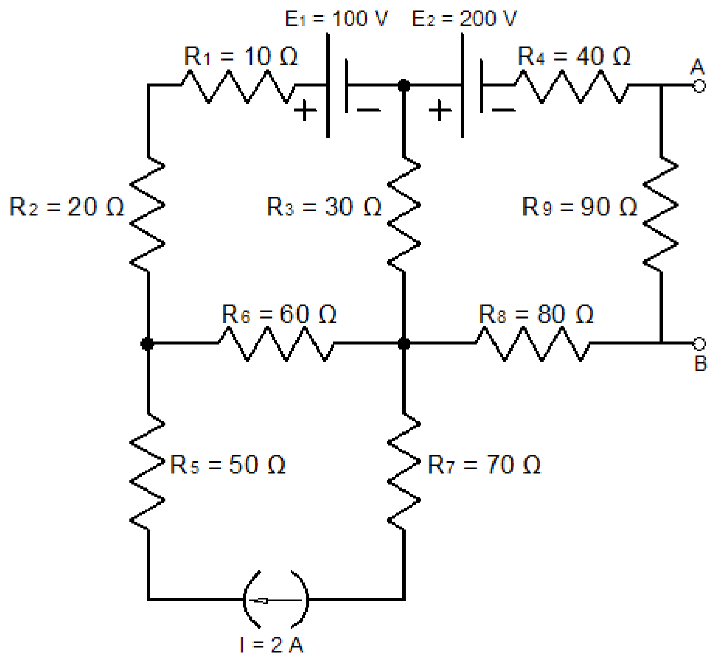
Como vemos la configuración que tenemos es la misma que en el caso de la resolución del circuito por el método de las mallas, por lo tanto, para no reiterar, tomaremos el valor de I_{R6}, y resolvemos:

$$E_{Th} = I_{R6} \cdot R_6 = 0{,}504 \text{ A} \cdot 30 \ \Omega = 15{,}138 \text{ V}$$

Entonces la configuración del equivalente de Thevenin será la siguiente:

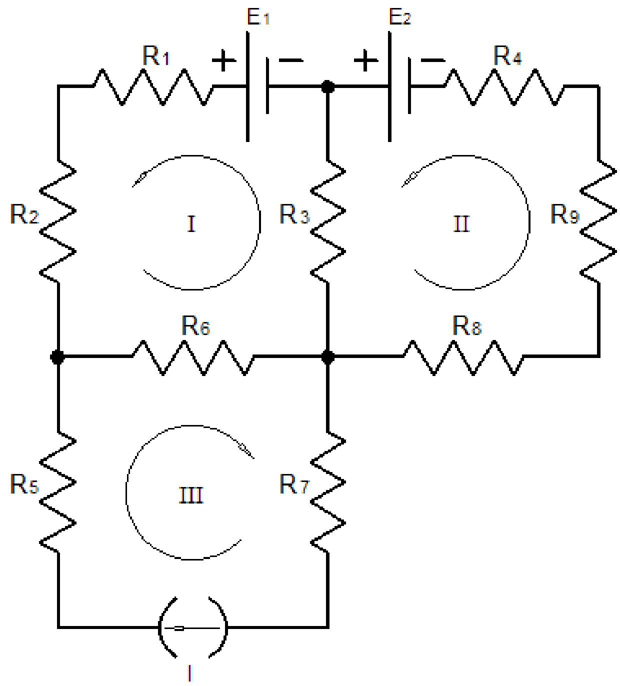


Ejercicio N°3:



Se determinarán las corrientes de cada rama del siguiente circuito, por el método de las mallas, por el teorema de superposición de efectos, por el método de las tensiones nodales y además se determinará el equivalente de Thevenin en los bornes AB.

a.- Método de las corrientes de malla.



Como primera medida analizamos la cantidad de ecuaciones a plantear. Observando el circuito elegimos las mallas, pero teniendo en cuenta que en la malla III, la corriente de rama y de la malla es conocida, ya que la misma queda impuesta por la fuente de corriente I. Por lo tanto el número de ecuaciones a plantear será:

Número de ramas – Número de nodos – Número fuentes de Corriente + 1 = Número ecuaciones

5 – 3 – 1 + 1 = 2

Por lo tanto las incógnitas a plantear son solamente dos I_I e I_{II}.

$$\begin{cases} I_I \cdot (R_1 + R_2 + R_3 + R_6) - I_{II} \cdot R_3 = E_1 - I \cdot R_6 \\ -I_I \cdot R_3 + I_{II} (R_3 + R_4 + R_8 + R_9) = E_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_I \cdot (10\,\Omega + 20\,\Omega + 30\,\Omega + 60\,\Omega) - I_{II} \cdot 30\,\Omega = 100\text{ V} - 2\text{ A} \cdot 60\,\Omega \\ -I_I \cdot 30\,\Omega + I_{II} (30\,\Omega + 40\,\Omega + 80\,\Omega + 90\,\Omega) = 200\text{ V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 120\, I_I - 30\, I_{II} = -20\text{ V} \\ -30\, I_I + 240\, I_{II} = 200\text{ V} \end{cases}$$

Calculamos los determinantes, para conocer I_I e I_{II}.

Determinante principal:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 120 & -30 \\ -30 & 240 \end{vmatrix} = 28800 - 900 = 27900$$

Determinación de la corriente de la malla I_I

$$I_I = \frac{\Delta I_I}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -20 & -30 \\ 200 & 240 \end{vmatrix}}{27900} = \frac{-4800 + 6000}{27900} = \frac{1200}{27900} = 0{,}043\text{ A}$$

Determinación de la corriente de la malla I_{II}

$$I_{II} = \frac{\Delta I_{II}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 120 & -20 \\ -30 & 200 \end{vmatrix}}{27900} = \frac{24000 - 600}{27900} = \frac{23400}{27900} = 0{,}838\text{ A}$$

Las corrientes de rama serán:

$I_{R12} = I_I = 0{,}043$ A

$I_{R3} = I_{II} - I_I = 0{,}838$ A $- 0{,}043$ A $= 0{,}795$ A

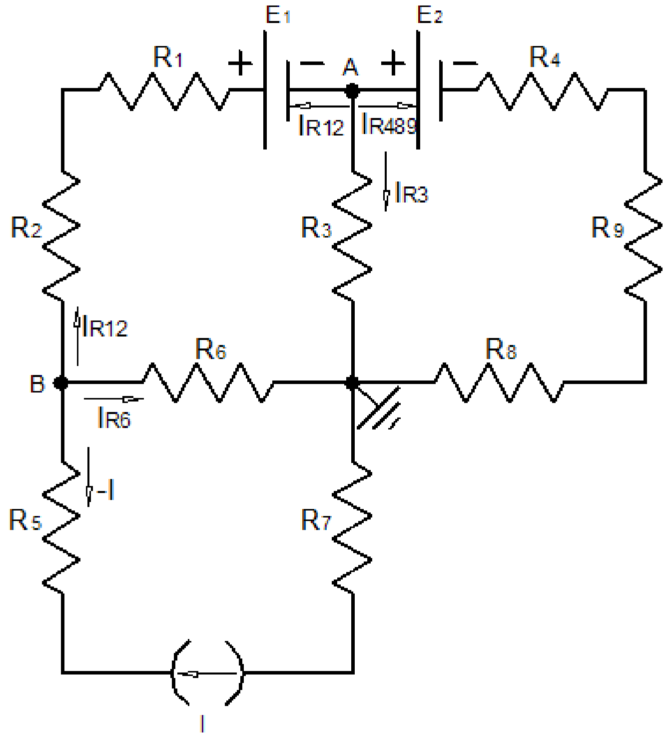
$I_{R6} = I + I_{I} = 2\ A + 0{,}043\ A = 2{,}043\ A$

$I_{R57} = I = 2\ A$

$I_{R489} = I_{II} = 0{,}838\ A$

I_{R12} = 0,043 A	**I_{R3} = 0,795 A**	**I_{R6} = 2,043 A**	**I_{R57} = 2 A**	**I_{R489} = 0,838 A**

b.- Método de las Tensiones Nodales.



Primeramente elegimos el nodo de referencia, para luego plantear las ecuaciones, hay que tener en cuenta que la rama de la fuente de corriente presenta una resistencia infinita.

$$\begin{cases} U_A \cdot \left(\dfrac{1}{R_4 + R_8 + R_9} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_1 + R_2} \right) - \dfrac{U_B}{R_1 + R_2} = \dfrac{E_2}{R_4 + R_8 + R_9} - \dfrac{E_1}{R_1 + R_2} \\ -\dfrac{U_A}{R_1 + R_2} . + U_B . \left(\dfrac{1}{R_6} + \dfrac{1}{R_1 + R_2} \right) = \dfrac{E_1}{R_1 + R_2} + I \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_A \cdot \left(\dfrac{1}{40\,\Omega + 80\,\Omega + 90\,\Omega} + \dfrac{1}{30\,\Omega} + \dfrac{1}{10\,\Omega + 20\,\Omega} \right) - \dfrac{U_B}{10\,\Omega + 20\,\Omega} = \dfrac{200\ V}{40\,\Omega + 80\,\Omega + 90\,\Omega} - \dfrac{100\ V}{10\,\Omega + 20\,\Omega} \\ -\dfrac{U_A}{10\,\Omega + 20\,\Omega} . + U_B . \left(\dfrac{1}{60\,\Omega} + \dfrac{1}{10\,\Omega + 20\,\Omega} \right) = \dfrac{100\ V}{10\,\Omega + 20\,\Omega} + 2\ A \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_A \cdot \left(\dfrac{1}{210\,\Omega} + \dfrac{1}{30\,\Omega} + \dfrac{1}{30\,\Omega} \right) - \dfrac{U_B}{30\,\Omega} = \dfrac{200\ V}{210\,\Omega} - \dfrac{100\ V}{30\,\Omega} \\ -\dfrac{U_A}{30\,\Omega} . + U_B . \left(\dfrac{1}{60\,\Omega} + \dfrac{1}{30\,\Omega} \right) = \dfrac{100\ V}{30\,\Omega} + 2\ A \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_A (0{,}004762\ S + 0{,}033333\ S + 0{,}033333\ S) - U_B . 0{,}033333\ S = 0{,}9523\ A - 3{,}333\ A \\ -U_A\, 0{,}033333\ S . + U_B . (0{,}016666\ S + 0{,}033333\ S) = 3{,}333\ A + 2\ A \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}071428\, U_A - 0{,}033333\, U_B = -2{,}380952\ A \\ -0{,}033333\, U_A + 0{,}049999\, U_B = 5{,}333\ A \end{cases}$$

Determinante principal:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,071428 & -0,033333 \\ -0,033333 & 0,049999 \end{vmatrix} = 0,0035713 - 0,001111 = 0,0024602$$

Determinación de la tensión U_A

$$U_A = \frac{\Delta U_A}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -2,380952 & -0,033333 \\ 5,333 & 0,049999 \end{vmatrix}}{0,0024602} = \frac{-0,11904 + 0,177764}{0,0024602} = \frac{0,058724}{0,0024602} = 23,867 \text{ V}$$

Determinación de la tensión U_B

$$U_B = \frac{\Delta U_B}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0,071428 & -2,380952 \\ -0,033333 & 5,333 \end{vmatrix}}{0,0024602} = \frac{0,38092 - 0,079364}{0,0024602} = \frac{0,30155}{0,0024602} = 122,573 \text{ V}$$

Calcularemos ahora, conociendo U_A y U_B las corrientes de rama.

$$I_{R12} = \frac{U_A + E_1 - U_B}{R_1 + R_2} = \frac{23,867 \text{ V} + 100 \text{ V} - 122,573 \text{ V}}{10\,\Omega + 20\,\Omega} = \frac{1,29 \text{ V}}{30\,\Omega} = 0,043 \text{ A}$$

$$I_{R3} = \frac{U_A}{R_3} = \frac{23,87 \text{ V}}{30\,\Omega} = 0,795 \text{ A}$$

$$I_{R498} = \frac{U_A - E_2}{R_4 + R_8 + R_9} = \frac{23,867 \text{ V} - 200 \text{ V}}{40\,\Omega + 80\,\Omega + 90\,\Omega} = \frac{-176,13\text{V}}{210\,\Omega} = -0,838 \text{ A}$$

$$I_{R6} = \frac{U_B}{R_6} = \frac{122,573 \text{ V}}{60\,\Omega} = 2,0428 \text{ A}$$

$$I_{R57} = I = 2 \text{ A}$$

I_{R12} = 0,043 A	**I_{R3} = 0,795 A**	**I_{R6} = 2,043 A**	**I_{R57} = 2 A**	**I_{R489} = 0,838 A**

Como se ve, los valores prácticamente coinciden con los determinados por el método de las mallas.

c.- Método por teorema de superposición de efectos.

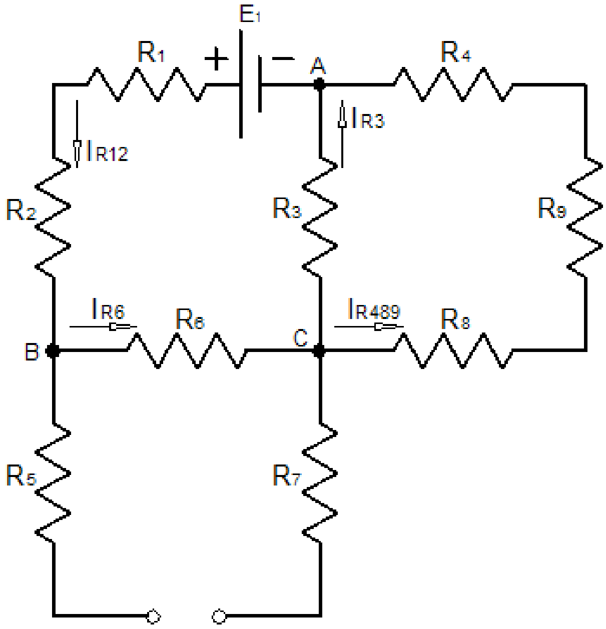
Como primer paso pasivamos E_2 e I, la primera como un cortocircuito y la segunda como un circuito abierto. Actuando E_1, calculamos R_T^1

$$R_T^1 = R_1 + R_2 + R_6 + \frac{(R_4 + R_8 + R_9).R_3}{R_4 + R_8 + R_9 + R_3} = 10\,\Omega + 20\,\Omega + 60\,\Omega + \frac{(40\,\Omega + 80\,\Omega + 90\,\Omega).30\,\Omega)}{40\,\Omega + 80\,\Omega + 90\,\Omega + 30\,\Omega} =$$

$$R_T^1 = 116,25\,\Omega$$

$$I_T^1 = I_{R12}^1 = I_{R6}^1 = \frac{E_1}{R_T^1} = \frac{100 \text{ V}}{116,25\,\Omega} = 0,86 \text{ A}$$

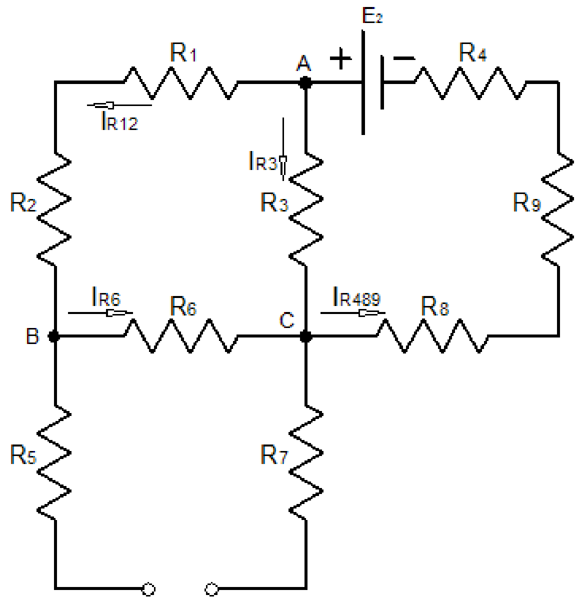
$$U_{AC}^1 = E_1 - I_T^1 .(R_1 + R_2 + R_6) = 100 \text{ V} - 0,86 \text{ A} .(10\,\Omega + 20\,\Omega + 60\,\Omega) = 22,6 \text{ V}$$



$$I_{R3}^{1} = \frac{U_{AC}^{1}}{R_3} = \frac{22{,}6\ V}{30\ \Omega} = 0{,}753\ A$$

$$I_{R489}^{1} = \frac{U_{AC}^{1}}{R_4 + R_8 + R_9} = \frac{22{,}6\ V}{40\ \Omega + 80\ \Omega + 90\ \Omega} = \frac{22{,}6\ V}{210\ \Omega} = 0{,}107\ A$$

Estado 2, actuando E_2, y pasivando a E_1 e I.



$$R_T^2 = R_4 + R_8 + R_9 + \frac{(R_1 + R_2 + R_6).R_3}{R_1 + R_2 + R_6 + R_3} = 40\ \Omega + 80\ \Omega + 90\ \Omega + \frac{(10\ \Omega + 20\ \Omega + 60\ \Omega).30\ \Omega)}{10\ \Omega + 20\ \Omega + 60\ \Omega + 30\ \Omega} =$$

$$R_T^2 = 232{,}5\ \Omega$$

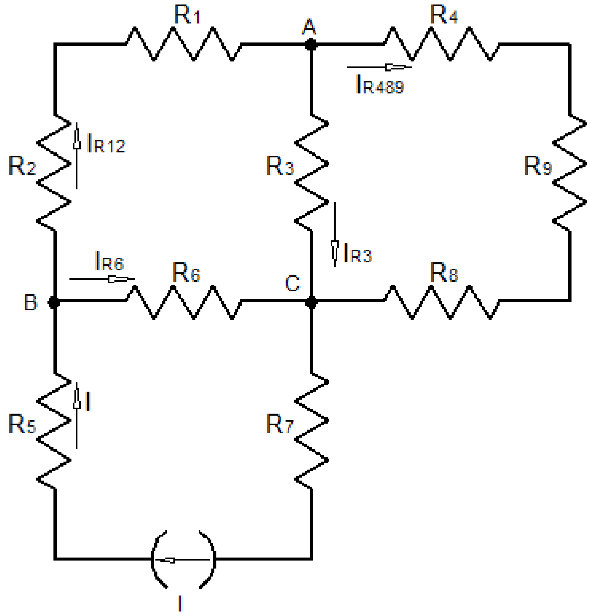
$$I_T^2 = I_{R489}^2 = \frac{E_2}{R_T^2} = \frac{200\ V}{232{,}5\ \Omega} = 0{,}86\ A$$

$$U_{AC}^2 = E_2 - I_T^2 . (R_4 + R_8 + R_9) = 200\ V - 0{,}86\ A . (40\ \Omega + 80\ \Omega + 90\ \Omega) = 19{,}4\ V$$

$$I_{R3}^2 = \frac{U_{AC}^2}{R_3} = \frac{19{,}4\ V}{30\ \Omega} = 0{,}646\ A$$

$$I^2_{R12} = I^2_{R6} = \frac{U^2_{AC}}{R_1 + R_2 + R_6} = \frac{19{,}4\ V}{10\ \Omega + 20\ \Omega + 60\ \Omega} = \frac{19{,}4\ V}{90\ \Omega} = 0{,}215\ A$$

Estado 2, actuando I, y pasivando a E_1 e E_2.



$$R^3_T = \frac{\left(R_1 + R_2 + \frac{(R_4 + R_8 + R_9).R_3}{R_4 + R_8 + R_9 + R_3}\right).R_6}{R_1 + R_2 + \frac{(R_4 + R_8 + R_9).R_3}{R_4 + R_8 + R_9 + R_3} + R_6} =$$

$$R^3_T = \frac{\left(10\ \Omega + 20\ \Omega + \frac{(40\ \Omega + 80\ \Omega + 90\ \Omega).30\ \Omega}{40\ \Omega + 80\ \Omega + 90\ \Omega + 30\ \Omega}\right).60\ \Omega}{10\ \Omega + 20\ \Omega + \frac{(40\ \Omega + 80\ \Omega + 90\ \Omega).30\ \Omega}{40\ \Omega + 80\ \Omega + 90\ \Omega + 30\ \Omega} + 60\ \Omega} = 29{,}03\ \Omega$$

$$U^3_{BC} = I.R^3_T = 2\ A\ .\ 29{,}03\ \Omega) = 58{,}06\ V$$

$$I^3_{R6} = \frac{U^3_{BC}}{R_6} = \frac{58{,}06\ V}{60\ \Omega} = 0{,}967\ A$$

$$I^3_{R12} = \frac{U^3_{BC}}{R_1 + R_2 + \frac{(R_4 + R_8 + R_9).R_3}{R_4 + R_8 + R_9 + R_3}} = \frac{58{,}06\ V}{10\ \Omega + 20\ \Omega + \frac{(40\ \Omega + 80\ \Omega + 90\ \Omega).30\ \Omega}{40\ \Omega + 80\ \Omega + 90\ \Omega + 30\ \Omega}} = \frac{58{,}06\ V}{56{,}25\ \Omega} = 1{,}033\ A$$

O sino

$$I^3_{R12} = I - I^3_{R6} = 2\ A - 0{,}967\ A = 1{,}033\ A$$

$$U^3_{AC} = I^3_{R12}.R_{AC} = I^3_{R12}.\frac{(R_4 + R_8 + R_9).R_3}{R_4 + R_8 + R_9 + R_3} = 1{,}033\ A.\frac{(40\ \Omega + 80\ \Omega + 90\ \Omega).30\ \Omega}{40\ \Omega + 80\ \Omega + 90\ \Omega + 30\ \Omega} =$$

$$U = 1{,}033\ A.26{,}25\ \Omega = 27{,}116\ V$$

$$I^3_{R489} = \frac{U^3_{AC}}{R_{489}} = \frac{U^3_{AC}}{R_4 + R_8 + R_9} = \frac{U^3_{AC}}{40\ \Omega + 80\ \Omega + 90\ \Omega}\frac{27{,}116\ V}{210\ \Omega} = 0{,}129\ A$$

$$I^3_{R3} = \frac{U^3_{AC}}{R_3} = \frac{27{,}116\ V}{30\ \Omega} = 0{,}904\ A$$

Estado final:

$$I_{R12} = I^1_{R12} + I^2_{R12} - I^3_{R12} = 0{,}86\ A + 0{,}215\ A - 1{,}033\ A = 0{,}042\ A$$

$I_{R3} = -I_{R3}^1 + I_{R3}^2 + I_{R3}^3 = -0{,}753\ A + 0{,}646\ A + 0{,}904\ A = 0{,}797\ A$

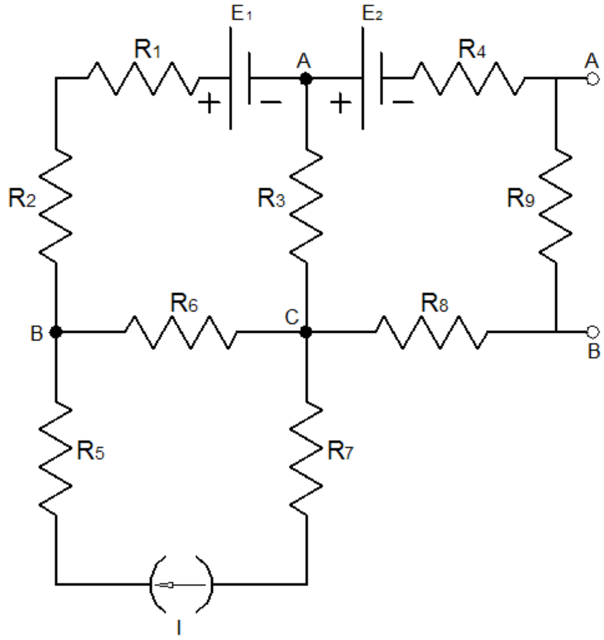
$I_{R489} = I_{R489}^1 + I_{R489}^2 - I_{R489}^3 = 0{,}107\ A + 0{,}86\ A - 0{,}129\ A = 0{,}838\ A$

$I_{R57} = I_{R57}^1 + I_{R57}^2 + I_{R57}^3 = 0\ A + 0\ A + 2\ A = 2\ A$

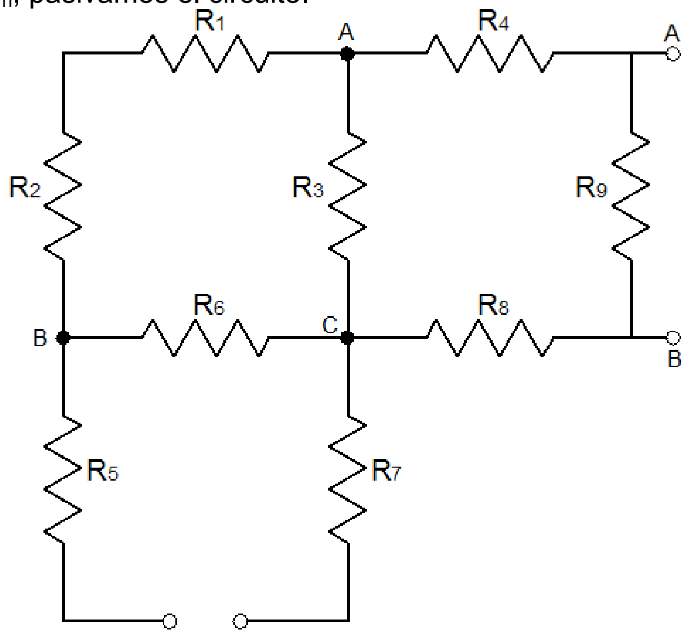
$I_{R6} = I_{R6}^1 + I_{R6}^2 + I_{R6}^3 = 0{,}86\ A + 0{,}215\ A + 0{,}967\ A = 2{,}042\ A$

I_{R12} = 0,042 A	**I_{R3} = 0,797 A**	**I_{R6} = 2,042 A**	**I_{R57} = 2 A**	**I_{R489} = 0,838 A**

d.- Determinación del equivalente de Thevenin.



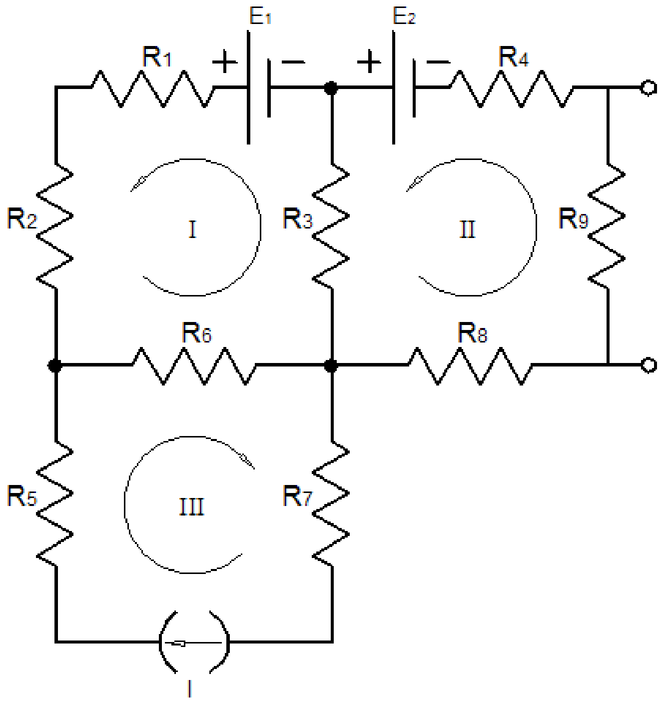
Para determinar la R_{Th}, pasivamos el circuito.



$$R_{Th} = \frac{\left(\frac{(R_1 + R_2 + R_6).R_3}{R_1 + R_2 + R_6 + R_3} + R_4 + R_8\right).R_9}{\frac{(R_1 + R_2 + R_6).R_3}{R_1 + R_2 + R_6 + R_3} + R_4 + R_8 + R_9} =$$

$$R_{Th} = \frac{\left(\frac{(10\,\Omega + 20\,\Omega + 60\,\Omega).30\,\Omega}{10\,\Omega + 20\,\Omega + 60\,\Omega + 30\,\Omega} + 40\,\Omega + 80\,\Omega\right).90\,\Omega}{\frac{(10\,\Omega + 20\,\Omega + 60\,\Omega).30\,\Omega}{10\,\Omega + 20\,\Omega + 60\,\Omega + 30\,\Omega} + 40\,\Omega + 80\,\Omega + 90\,\Omega} = 55{,}16\,\Omega$$

Para determinar la E_{Th} necesitamos la caída de tensión en R_9, ya que es igual a E_{Th}, por condición de circuito paralelo.
Para su cálculo podemos emplear cualquiera de los métodos vistos anteriormente, por ejemplo el método de las mallas.



$$\begin{cases} I_I\,.(R_1 + R_2 + R_3 + R_6) - I_{II}\,.R_3 = E_1 - I.R_6 \\ -I_I\,.R_3 + I_{II}\,(R_3 + R_4 + R_8 + R_9) = E_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_I\,.(10\,\Omega + 20\,\Omega + 30\,\Omega + 60\,\Omega) - I_{II}\,.30\,\Omega = 100\text{ V} - 2\text{ A}\,.60\,\Omega \\ -I_I\,.30\,\Omega + I_{II}\,(30\,\Omega + 40\,\Omega + 80\,\Omega + 90\,\Omega) = 200\text{ V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 120\,I_I - 30\,I_{II} = -20\text{ V} \\ -30\,I_I + 240\,I_{II} = 200\text{ V} \end{cases}$$

Calculamos los determinantes, para conocer I_I e I_{II}.
Determinante principal:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 120 & -30 \\ -30 & 240 \end{vmatrix} = 28800 - 900 = 27900$$

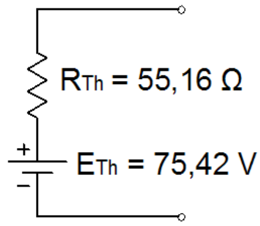
Únicamente nos hace falta determinar la corriente de la malla I_{II}, que es igual a I_{R489}.

$$I_{II} = \frac{\Delta I_{II}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 120 & -20 \\ -30 & 200 \end{vmatrix}}{27900} = \frac{24000 - 600}{27900} = \frac{23400}{27900} = 0{,}838\text{ A}$$

Por lo tanto

$$E_{Th} = U_{R9} = I_{II}\,.R_9 = 0{,}838\text{ A}\,.90\,\Omega = 75{,}42\text{ V}$$

El equivalente de Thevenin será:


RTh = 55,16 Ω
ETh = 75,42 V
+
−